

PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU**Clasa a V-a**

1. Într-o clasă de 25 de elevi, cinci elevi nu cunosc limba engleză, șase elevi nu cunosc franceza, șapte nu cunosc germana, iar 4 nu cunosc spaniola. Câți elevi cunosc toate cele patru limbi ?

Petre Năchilă, Ploiești

2. Fie x, y, z numere naturale astfel încât $x + y + z = 11$. Arătați că suma $xy + yz + zx$ este pătrat perfect. Arătați că nu există x, y și z consecutive care să îndeplinească această condiție.

Emilian Deaconescu, Ceptura

3. Calculați ultima cifră a numărului

$$n = 4 \cdot 3^{10} + 5 \cdot 3^{14} + 6 \cdot 3^{18} + \dots + 18 \cdot 3^{66} + 19 \cdot 3^{70}$$

Ioan Pascaru, Ploiești

4. Determinați cifrele a, b, c, x știind că:

$$\overline{abc} + \overline{ab0} + \overline{a0c} = \overline{xx6}$$

Gheorghe Achim, Miștil

5. Să se rezolve în numere naturale ecuația: $a^a = \overline{bc}$.

Petre Năchilă, Ploiești

6. Să se determine toate numerele naturale \overline{ab} pentru care avem $\overline{ab} = a + b + ab$

Nicolae Scuratovschi, Constanța

7. Să se determine toate numerele de trei cifre \overline{abc} pentru care

$$\overline{abc} = 5(\overline{ab} + \overline{ca} + \overline{bc}) - 9.$$

Ana Maria și Titus Dobândă, Făget, Timiș

8. Determinați toate numerele de trei cifre \overline{abc} pentru care avem

$$\overline{abc} = 2 \cdot \overline{ab} + 3c + 19.$$

Ioana și Dumitru Oprea, Dragodănești, Dambovița

9. Utilizând cifrele 1,3,4,5,7,8,9 o singura dată, să se completeze stelulele din egalitatea:

$$* * * + * * * * = ? + 2006 \text{ astfel încât, numărul natural reprezentat prin}$$

semnul întrebării să fie :

1. cel mai mic
2. cel mai mare

În fiecare caz în parte, să se explice raționamentul folosit și să se scrie toate soluțiile.

M. Oprea, Ploiești

10. Într-o clasă I s-au înscris copii de la trei grădinite. Jumătate din ei provin de la grădina numărul unu, o treime de la grădina numărul doi iar restul de la grădina numărul trei. Câți elevi provin de la fiecare grădina știind că numărul maxim de elevi ce pot fi înscrși într-o clasă este 20 iar numărul minim este 13?

Ioana Craciun și Gheorghe Craciun, Plopeni

Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele naturale n pentru care $2^n + 2^4 + 2^5$ este pătrat perfect.

Petre Năchilă, Ploiești

2. Determinați numerele naturale care au exact trei divizori naturali și a căror sumă este 2002.

Gheorghe Achim, Mișil

3. a) Calculați măsura unui unghi știind că triplul complementului său este cu $42^{\circ}30'$ mai mare decât jumătatea suplementului său.

b) Fie $\angle AOB$ unghiul cu măsura de la a) și $m(\angle BOC) > m(\angle AOB)$. Calculați $m(\angle BOC)$ știind că măsura dintre bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$ este de $42^{\circ}30'$. Faceți desenul corespunzător.

Ioan Pascaru, Ploiești

4. Determinați numerele naturale a,b,c pentru care avem:

$$8a+10b+15c=120$$

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

5. Dacă x și y sunt numere întregi arătați prin două metode diferite:

$$17|9x+5y \Leftrightarrow 17|2x+3y$$

Badea Daniela și Dumitrache Ion, Ploiești

6. Suma a două numere x și y este 20 iar y reprezintă $33,3(3)\%$ din x.

a) Calculați a^2-b^2 ;

b) Aflați mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} | 3 \text{ divide } x, b < x < a\}$.

Dumitru Cărbunaru, Drobeta Tr. Severin

7. Să se cerceteze dacă :

$$(60, [84, 96]) = [(60, 84), (60, 96)].$$

Gheorghita Gagea, Drobeta Tr. Severin

8. Să se determine numărul de fracții ireductibile de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ cu $14 < \overline{ab} < \overline{cd} < 20$.

Mihail Focșeneanu, Ploiești

9. Arătați că numărul $\frac{\overline{aa\dots a}}{2n \text{ ori}} + \frac{\overline{bb\dots b}}{2p \text{ ori}} - 2 \cdot \frac{\overline{aa\dots a}}{n \text{ ori}} - 2 \cdot \frac{\overline{bb\dots b}}{p \text{ ori}}$ se divide prin 9 oricare ar fi n,p numere naturale și a,b cifre.

Mircia Bursuc, Roman

10. Fie $A=3+3^2+3^3+\dots+3^{4n}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că A se divide cu 15 și că A se divide cu produsul a cinci numere naturale consecutive.

Petre Năchilă, Ploiești

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve ecuația : $\overline{2,5x} + \overline{y(2)} = 6,3$

Petre Năchilă, Ploiești

2. Să se afle x din proporția:

$$\frac{1+9^2+9^4+9^6+\dots+9^{1998}}{x} = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{1999}}{0,125 \cdot [5^4 + 2 \cdot 8^3 : 2^3 \cdot 5 + 15]}$$

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

3. Dacă x,y,z sunt numere întregi astfel încât $7x-5y-28z=0$ arătați că $y(x+z)$ este divizibil cu 35.

Gheorghe Achim, Mișil

4. Fie t un număr natural nenul $A = \sqrt{t} + 2\sqrt{t+2} + 2\sqrt{t+4} + \sqrt{t+6}$ și $B = 2(\sqrt{t+1} + \sqrt{t+3} + \sqrt{t+5})$. Arătați că $A < B$.

Ioana Crăciun și Gheorghe Crăciun, Ploiești

5. Paralelogramul ABCD are perimetrul 52 cm, $AB = 18$ cm și $m(\angle B) = 150^\circ$ iar O este intersecția diagonalelor. $M \in (OD)$, $MO = \frac{DO}{3}$, $N \in (BO)$, $NO = \frac{BO}{4}$.

- a) Calculați aria triunghiului CMN;
b) Calculați aria triunghiului CNP dacă se știe că AMCP este paralelogram.

Ioan Pascaru, Ploiești

6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Perpendicularele din A pe bisectoarea interioară a unghiului B se intersectează cu aceasta în B' situat în exteriorul triunghiului ABC. Paralela prin B' la AB se intersectează cu BC în F. Fie E simetricul lui F față de C. Să se arate că :

- a) $AB = 2AF$;
b) Dacă A,F, B' sunt coliniare atunci $B'C$ este paralelă cu AF.

Ion Bilciurescu, Boldești

7. Fie a,b,c cifre nenule $a < b < c$ astfel încat:

$$\sqrt{a, b(c)} + \sqrt{b, c(a)} + \sqrt{c, a(b)} \in \mathbb{Q}. \text{Calculați suma numerelor determinate mai sus.}$$

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

8. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\angle A) = 90^\circ$, (CD este bisectoarea unghiului ACB, $D \in (AB)$). Perpendiculara în B pe BC intersectează dreapta CD în E, iar F este simetricul lui E față de BC. $FD \cap BC = \{P\}$; $EP \cap FC = \{M\}$.

- 1) Să se arate că EM și FC sunt perpendiculare;
2) Dacă $PC = 2DM$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

9. Determinați numerele naturale a și b astfel încât să avem:

$$ab = 4(a+b+3)$$

Constanța Petre, Ploiești

10. Construiți numai cu rigla și compasul un triunghi isoscel ABC având $m(\hat{A}) = 30^\circ$, $BC = 6$ u.m., $[AB] = [BC]$.

Octavian Vasilcanu, Drobeta Tr.Severin

Clasa a VIII-a

1. Fie $E(x) = \frac{4x^2 - 8x + 17}{x^2 - 2x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea maximă a lui $E(x)$ și valoarea lui x pentru care se obține această valoare maximă.

Tatiana Pană, Ploiești

2. Să se determine ultimele opt cifre ale numărului 5^{2003} .

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

3. Fie a,b,c numere reale pozitive și x număr real astfel încât

$$(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2 = (a+b+c)^2. \text{ Arătați că } \frac{x}{a+b+c} \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Ion Bilciurescu, Boldești

5. Fie $E = \frac{n^6 - 5n^4 + 4n^2}{n^2 + 2n}$ unde n este un număr natural nenul. Arătați că pentru orice număr natural n nenul :

- a) $E(n)$ este reductibilă
- b) $E(n)$ este divizibilă și cu 3 și cu 8

Emilian Deaconescu, Ceptura

6. Demonstrați ca pătratul sumei pătratelor a două numere consecutive se poate descompune într-o sumă de două pătrate, numere prime între ele.

Nicolae Udrea, Rm. Vâlcea

7. Să se arate că: $7a^2x^2 + ax + 3 > ax(1 + \sqrt{12})$, $a, x > 0$

Felicia Ozunu, Vulcan

8. Lungimile laturilor unui triunghi sunt numere naturale consecutive. Dacă aria triunghiului este 6 cm^2 aflați lungimile laturilor triunghiului și măsura unghiului opus laturii de lungime cea mai mare.

Badea Daniela și Dumitrache Ion, Ploiești

9. Să se determine cele mai mici numere naturale a și b nenule, diferite de 1, care verifică relația $a^{11} = b^{12}$.

Iohana Tănase, Buzău

10. Să se determine numerele întregi „ n ” pentru care $E(n) = \sqrt{\frac{3n-2}{n+2}} + \sqrt{\frac{2n-1}{n+1}} \in \mathbb{Z}$

Mircia Bursuc, Roman