PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul A=1234…9899100..20052006. De câte ori a fost folosită cifra 5 în scrierea lui A?

Ani Drăghici, Craiova

2. Să se determine două numere naturale ştiind că primul împărţit la al doilea dă restul 5, al doilea împărţit la primul dă restul 3 şi suma câturilor celor două împărţiri este 4.

Valeria Radu, Măgurele

3. Suma a zece numere naturale distincte este 65. Câte soluţii are problema?

Petre Năchilă, Ploieşti

4. Determinaţi mulţimile A, B, C ştiind că:

a) $A \cup B \cup C=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

b) $A \cap C=\varnothing$

c) $B \cap C=\{9\}$

d) $C-B=\{x \mid x \in N^{*}; 4 \mid x\}$

e) $A-B=\{1,3,5,7\}$

Adelina Monica Apostol, Ploieşti

5. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $n=2^{2006}-2^{2004}+2^{2001}$.

Maria Marghioala Andrei, Vălenii de Munte

6. Suma dintre câtul şi restul unei împărţiri este 26. Restul este cu 2 mai mare decât triplul câtului.Aflaţi deîmpărţitul ştiind că suma dintre acesta şi împărţitor este 1035.

Ioan Pascaru, Ploieşti

7. Să se afle câte numere de trei cifre $\overline{abc}$ au proprietatea că $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{ca}+\overline{bc}$.

Nicolae Scuratovschi, Constanţa

8. Să se arate că dacă un număr are şase cifre şi este divizibil cu 1001 atunci suma cifrelor sale se divide cu doi.

Ana Maria Dobândă, Făget, Timiş

9. Să se rezolve ecuaţia $x(1+2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{12}) - 2^{14} + 2^{13}=0$

Eleonora Vulcu, Breaza

10. Determinaţi două numere pătrate perfecte astfel încât suma lor să fie 34.

Emilian Deaconescu, Ceptura

Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele naturale n pentru care

$$2\cdot 2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+\ldots+2^{n+29}=(1+\overline{abcd})^3$$

Sorin Hinoveanu, Dr.Turnu Severin

2. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=2$

Petre Năchilă, Ploieşti

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n nenul numărul

$A=9+9^2+9^3+\ldots+9^{4n}$ are cifra zecilor pară

Petre Năchilă, Ploieşti

4. Fie triunghiul *ABC* ascuţitunghic, *D* piciorul înălţimii din A şi $P\in(AB)$, $Q\in(AC)$ asfel încât $A_{\Delta BDP}=A_{\Delta DAC}$ şi $A_{\Delta CDQ}=A_{\Delta DAB}$. Să se arate că PQ||BC.

Stanică Nicolae şi Damian Marius, Brăila

5. Demonstraţi că există o infinitate de numere care au proprietatea că împărţite succesiv la 6, 5 ,4, 3, 2 dau respectiv resturile 5, 4, 3, 2, 1.

Alexandru Dumitru, Ploiești

6. Să se determine toate tripletele de numere naturale (x, y, z) care verifică egalităţile $\frac{8}{x}=\frac{6}{y}=\frac{z}{10}$

Gheorghe Ciucă, Rm. Vâlcea

7. În triunghiul ABC, BM şi CN sunt mediane şi se intersectează în G iar AG se intersectează cu BC în P.

a) Dacă AP şi BC sunt perpendiculare, atunci [AP este bisectoarea unghiului A;

b) Dacă aria triunghiului GPC este 4 cm^2, aflaţi aria triunghiului MNP.

Ioan Pascaru, Ploiești

8. După o majorare cu a% si o reducere cu b% preţul unui obiect care iniţial a fost 2 800 000 lei devine 2898 000 lei. Dacă valorile majorării şi reducerii sunt proporţionale cu numerele 20 şi 27, aflaţi a şi b.

Ion Tomescu, Mizil

9. Fie şirul de numere naturale $a_1<a_2<\ldots<a_n$ cu proprietatea că a_1+a_n este impar. Fie A=$\left\{(a_k,a_{k+1})\middle|a_k+a_{k+1}\ este\, impar\right\}$. Arătaţi că A are un număr impar de elemente.

Moldoveanu Dragos, Sinaia

10. Să se afle numerele cuprinse între 10^6 şi $3\cdot 10^6$ divizibile cu primele şapte numere prime.

Ion Bilciurescu, Boldești

Clasa a VII-a

1. Să se stabilească valoarea se adevăr a propoziţiei $\sqrt{21+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{9+3\sqrt{5}}}}}\ge 5$

Sorin Hinoveanu, Dr.Turnu Severin

2. Să se afle numerele prime a şi b pentru care $a^b-b^a=1$

Petre Năchilă , Ploiești

3. Fie numerele a, b ,c astfel încât a+2b+3c=19 şi 4a+3b+2c=36. Să se determine (3a+b-c)(2a+b).

Petre Năchilă, Ploiești

4. Fie numărul $a=4^{n+1}+6^{n+2}+9^{n+2}$ unde n este număr natural. Arătaţi că a este pătrat perfect şi determinaţi ultima cifră a lui a

Gh.Achim, Mizil

5. Fie a, b, c numere pozitive astfel încât $\sqrt{a}\ge 3$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{5}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{5}\ge 6$. Să se arate că a+b+c$\ge$14

Carmen Rotaru, Roșiorii de Vede

6. Există numere întregi x, y care satisfac egalitatea $x^4+y^4=x^2+y^2+2006$?

Maria Marghioala Andrei, Vălenii de Munte

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, punctul E situat pe [AB], din care se duce $ED\perp BC$ şi $EM||AC$, unde $D\in BC$ şi $M\in BC$.

a) Să se arate că triunghiurile AED şi CME sunt asemenea

b) Dacă AC = b, AB =c şi AE = kAB, să se determine perimetrul triunghiului EMC în funcţie de b, c, k.

c) Să se studieze dacă triunghiurile AED şi CME rămân asemenea în cazul în care punctul E este pe dreapta AB, dar în exteriorul segmentului [AB].

Anghel Dafina, Vălenii de Munte

8. Dacă a,b,c sunt trei numere raţionale nenule pentru care abc = 2, calculaţi valoarea expresiei: $E=\frac{a}{2(a-ab+1)}-\frac{b}{bc-2b+2}-\frac{c}{2(2-ac-c)}$

Maria Negrilă şi Anton Negrilă, Ploieşti

9. Arataţi fără a extrage rădăcina pătrată că : $\sqrt{6}+\sqrt{20}+\sqrt{30}<12{,}5$.

Rodica Damian, Breaza

10. Fie suma S $=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{2006}{2^{2006}}$.

a) Să se calculeze S;
b) Să se precizeze care este partea întreagă a lui S.

Minea Victor, Mizil

Clasa a VIII-a

1. Fie n un număr natural n>2. Numărătorii şi numitorii fracţiilor $\frac{22...23}{33...34}$ şi $\frac{55...56}{66...67}$ au câte n cifre. Să se compare fracţiile.

Petre Năchilă, Ploieşti

2. Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB = 10 cm şi BC = 6 cm, P$\in$BC, PB este 50% din PC, iar M$\in$DC astfel încât AM $\perp$ MP. Dacă AV $\perp$ (ABC), AV = $6\sqrt{2}$, calculaţi d(V, PM).

Mihail Focseneanu, Ploieşti

3. Dacă x, y, z sunt numere întregi astfel încât 2y+10x -11z=0, arătaţi că x^2(y- 6z) este divizibil cu 44.

Gh.Achim, Mizil

4. Fie S= $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+...\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}, n\in N.$

a) Arătaţi că S<0,25
b) Aflaţi numerele naturale n pentru care S^{-1} este un număr natural.

Ozunu Cezar, Daneţi, Dolj

5. Ştiind că *x>y şi xy=1* să se arate că $x^2+y^2+n\geq2(x-y)\sqrt{n+2}$ unde x şi y sunt numere reale iar n număr natural.

Dan Coma, Vădăstriţa, Olt

6. Să se arate că prima zecimală a numărului $\sqrt{49n^2+5n}$ $n\in N^*$ este trei.

Felicia Ozunu, Vulcan

7. Fie A $=\frac{x+y}{x}$ şi B= $\frac{x+y}{y}, x,y\in R^*$. Să se arate că :

1) A+B=AB
2)(A-1)(B-1)=$A^{-1}+B^{-1}$
3)A+B$\geq$4

Dan Coma, Vădăstriţa, Olt

8. Fie expresia $E(x)=2x^2-3x+1$.

a) Să se demonstreze că $E(x)+1>0$ pentru orice x număr real;

b) Să se afle valoarea lui x pentru care $E(x)$ e minimă;

c) Demonstrează că $xE(x)$ este divizibil cu 2 oricare ar fi x număr întreg.

Gh. Ciucă, Rm.Vâlcea

9. a) Demonstraţi că lungimea segmentului AB unde $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ este

$$AB=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

b)Aflaţi locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ştiind că:

$$\sqrt{x^2+y^2-4y+4}+\sqrt{x^2+y^2-6x+8y+25}=3\sqrt{5}$$

Ioan Pascaru, Ploieşti

10. Fie ABCDEFGH un paralelipiped dreptunghic având dimensiunile a, b, c. Dacă perpendicularele duse din vârfurile A, C, H pe diagonala DF sunt concurente într-un punct T, demonstraţi că:

a) paralelipipedul este cub;

b) calculaţi măsura unghiului format de DG cu planul (CAE)

Maria Negrilă şi Anton Negrilă, Ploieşti