Clasa a IX-a

1370. Se consideră numerele:

$$a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2004}$$

$$b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2003}{2004}$$

a) Să se arate că a<b;

b) Să se arate că $a \cdot b < \left(\frac{2005}{2}\right)^2$

Toma Gloambeş şi Mihai-Lucian Gloambeş, Comăneşti

1371. Determinați (k,n) numere naturale astfel încât numărul:

$N = \frac{1}{2k+1}[-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + (-1)^{3k+1} \cdot \sqrt{k^2 - 8k + 27} - (-1)^{4k} \cdot \sqrt{2k^2 - 13k + 33}$ să fie număr natural.

Gheorghe Stancu, Ploieşti

1372. Să se determine mulțimile:

$A = \left\{ x \in N \middle| \frac{|[x-2000]| + 2}{|[x-2000]| - 1} \in N \right\}; B = \left\{x \in Z \middle| \frac{[|x-2000|] + 2}{[|x-2000|] - 1} \in Z\right\}$ unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Petre Năchilă, Ploieşti

1373. Să se determine n număr natural nenul astfel încât să avem egalitatea:

$$\sqrt[n]{97 + 56\sqrt{3}} + \sqrt[n]{97 - 56\sqrt{3}} = 4$$

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

1374. Rezolvați în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ecuația : $x^3 + y^3 + 6xy = 1$.

Claudiu şi Corina Militaru, Ploieşti

1375. Să se arate că ecuația 5x+7y=n, are totdeauna soluții în N pentru n>23.

Miron Oprea, Ploieşti

1376. Dacă $\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} = k, x, y, z \in R_+^*$, să se determine minimul expresiei

$$E = \frac{x^3 y}{z^2} + \frac{y^3 z}{x^2} + \frac{z^3 x}{y^2}$$

Dorin Mărchidanu, Corabia, Olt

Clasa a X-a

1377. Arătați că nu există numerele naturale x,y,z astfel încât:

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} + \frac{1}{z!} = \frac{1}{2003!}$$

eleva Anca Ştefania Tuțescu, Craiova

1378. Să se determine funcțiile $f : Z \to Z$ având proprietatea:
$f(m+f(n))=f(m)+n,\ \forall m,n \in Z$

Petre Năchilă, Ploieşti

1379. Soluția întreagă a ecuației $2^x x^2-8(2^x+1)=0$, reprezintă muchia unui tetraedru regulat. Aflați volumul tetraedrului.

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

1380. Într-un triunghi ABC avem relația $\sin\hat{A}\sin\hat{B}=3\sin\frac{\hat{C}}{2}$ .Determinați relația care există între laturile a,b,c ale triunghiului ABC.

Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

1381. Se dau numerele reale a,b,c de forma a=$\sqrt{x^2-6x+13}$ $x \in R$,
b=$\sqrt{y^2-8y+25}$ $y \in R$, c=$\sqrt{z^2-10z+41}, z \in R$. Să se determine x,y,z pentru care suma a+b+c este minimă.

Gheorghe Stancu, Ploieşti

1382. Să se rezolve în R ecuația:
$\sqrt[3]{x^4+11}-\sqrt[3]{3x^4+77}=-2$

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

1383. Să se demonstreze implicația : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+z} \Rightarrow x+y \geq 2z$ unde $x,y,z \in [-1,\infty)$.

Miron Oprea ,Ploieşti

Clasa a XI-a

1384. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{2004}\frac{(1-\cos kx)2003!}{2005!\sin x^2}$$

Gheorghe Stancu, Ploieşti

1385. Să se rezolve ecuația :

$$\left(8^{\lg x}+2\right)^{\lg 8}+2=x$$

Petre Năchilă, Ploieşti

1386. Fie x număr real, n număr natural. Arătați că $\left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{n}\right]=\left[\frac{\frac{[x]}{n}}{n}\right]=\left[\frac{x}{n^2}\right]$* unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a. Mai rămân valabile relațiile (*) dacă n număr întreg negativ?

Lucian Tuțescu, Craiova

1387. Determinați funcțiile $f : R \to R$ continue astfel încât
$f(xyz)=xf(x)+yf(y)+zf(z)\ \forall x,y,z \in R$

Lucian Tuțescu, Craiova

1388. Să se rezolve ecuația:

$$3^{\frac{2}{x}}+2\cdot 3^{\sqrt{\frac{x}{2}}}=9.$$

Gabriel Tica, Bailesti

1389. Determinați $f:R\to R$, astfel încât f(f(x)=x+4, pentru oricare x număr real şi $\exists \lim\limits_{x\to\infty}$ (f(x)-x).

Marian Ionescu, Piteşti

Clasa a XII-a

1390. Fie a şi b numere reale astfel încât $a^2 \geq 4b$. Să se demonstreze că toate matricile din mulțimea
M=$\{A\in M_2(R) \mid A^2+aA+bI_2=0\}$ au acelaşi determinant.

Petre Năchilă, Ploieşti

1391. Se consideră numerele pozitive a,b,c,d astfel încât a+b+c+d=1. Să se demonstreze că : $\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$

Vasile Şerdean,Gherla, Cluj

1392. Determinați $f:[a,b]\to R$ continue care verifică relația

$$\int_a^x tf(t)dt = x\int_a^x f(t)dt\,, \forall x\in[a,b]$$

Constantin Micu, Melineşti, Dolj

1393. Fie $A\in M_n(\mathbf{R})$, A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & .. & 3 & 3 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 2 & .. & 3 & 3 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 3 & 3 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & .. & 2 & 3 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 2 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & a & 3 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & a & 2 & 3 & .. & 3 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & a & 1 & 2 & .. & 3 & 3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & a & 1 & 1 & .. & 2 & 3 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 1 & a & 1 & 1 & .. & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $1\leq p \leq n$,
$a\in\mathbf{R}^*$.

a)Să se calculeze detA.

b)Pentru $A\in M_9(\mathbf{R})$ si p = 5 să se determine A^{-1}.

Gabriel Necula, Plopeni

1395. Să se calculeze: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\sin x+(n+1)\cos x}{n\cos x+(n+1)\sin x}dx,\ n\in N$

Dan Coma, Vădăstrița,Olt

PSIHOTETE