Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

1. Să se arate că $\sqrt[13]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 13}+\sqrt[31]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 31}<23$

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

2. Demonstrați că pentru orice n,k numere naturale nenule și k>3avem inegalitatea

$$\frac{1}{nk+1}+\frac{1}{nk+2}+...+\frac{1}{nk+nk}>\frac{3}{5}.$$

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

3. Se dă punctul fix O și segmentul [AB] mobil, de lungime *l* constantă, astfel încât aria triunghiului AOB este constantă ($A_{AOB}=S$). Se cere locul geometric al segmentului [AB]și locul geometric al punctului M, unde M este mijlocul segmentului [AB].

Anghel Dafina, Vălenii de Munte

4. Fie a, b numere naturale. Ce rest da numărul $N=a(a+1)(a+2)(a+3)-b(b+1)(b+2)(b+3)$ la împărțirea cu $3(a+b)+a^2+b^2+2$?

Mirela Mortici, Târgoviște

5. Dacă $a, b, c>0$ si $a+b+c=1$, să se demonstreze că :
$64\cdot(a+bc)(b+ca)(c+ab)\leq 8\cdot(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\leq(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2$

dr. *Dorin Mărghidanu, Corabia*

Clasa a X-a

1. Fie funcția crescătoare $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietata $[f\circ(f+1)](x)=x+1-f(3)$. Calculați f(1)+f(2)+…f(2006)

Felicia Ozunu, Daneți, Dolj

2. Dacă ecuația $x^2-4x+1=0$, admite rădăcinile x_1 și x_2 arătați că $x_1^7+x_2^7<2^{14}$

Felicia Ozunu, Vulcan

3. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuația cos2x-mcosx=msinx să admită rădăcină unică pe $[0,\pi]$

Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

4. Să se demonstreze că pentru $n\in\mathbb{N}^*$, avem :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{2^{k-1}}-1}\leq 1-\frac{1}{2^n}$$

dr. *Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt*

Clasa a XI-a

1. Arătați că dacă $n\in\mathbf{N}$, n par, $A\in M_n(\mathbf{N})$, atunci $\det(A+nA^t)$ se divide cu n+1. Am notat cu A^t transpusa matricei A.

N.Breazu, Ploiești

2. a) Fie A = $(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(R)$ şi B = $(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ astfel încât $b_{ij} = a_{ij} + x_i$ pentru orice $i, j = \overline{1,n}$. Să se arate că

$$\det B = \det A + x_1\sum_{j=1}^{n} A_{1j} + x_2\sum_{j=1}^{n} A_{2j} + ... + x_n\sum_{j=1}^{n} A_{nj} =$$

$$= \det A + x_1\sum_{j=1}^{n} B_{1j} + x_2\sum_{j=1}^{n} B_{2j} + ... + x_n\sum_{j=1}^{n} B_{nj} =$$

Marius Perianu, Slatina

3. Există $\lim_{n\to\infty}\{\ln n\}$,unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a lui *a* ?

Octavian Purcaru, Ploieşti

4. Să se determine numerele x_0 din intervalul (*a, b*) astfel încât şirul $x_{n+1} = \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x_n - a)(b - x_n)}$ să fie convergent unde 0<*a*<*b*.

O. Purcaru, Ploiesti

Clasa a XII-a

1. Dacă $1 \le x \le y$ atunci $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x+y}{2}} \le e^{x-y}$

Gh.Stoica, Petroşani

2. Pe Θ definim legea de compoziţie * : Θ x Θ → Θ dată prin x*y=[x]·[y] – {x}·{y} unde cu [*a*] am notat partea întreagă a numărului real *a*, iar cu {*a*}, partea fracţionară a numărului real *a*. Să se determine mulţimea M ⊂ Θ cu proprietatea că (M, *) este grup abelian.

N.Breazu, Ploieşti

3. Fie f : **R**→ **R** o functie definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\frac{1}{x}, x \ne 0 \\ 1 - a, x = 0, a \in R \end{cases}$$

Să se arate că:

1) f admite primitive <=> a= $\frac{1}{2}$;
2) f are proprietatea lui Darboux <=> 0< α < 1.

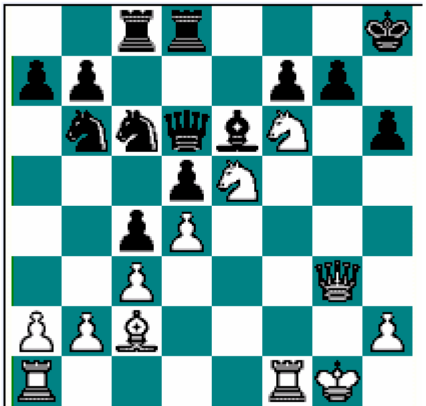
***

4. Fie m, n $\in (-1,1)$. Calculaţi primitivele funcţiei $f : R \to R$ dată de formula

$$f(x) = \frac{1 + mnx + (nx + m)\sin x + (mx + n)\cos x + 0,5mn\sin 2x}{1 + 2n\cos x + n^2\cos^2 x}$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Amuzamente matematice



albul mută şi dă mat în 2 mutări !