**4.** Sa se determine multimea primitivelor functiei $f : R \to R$ , $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2|}$ .

***

**5.** Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx, n \in N.$

a) Să se demonstreze că există $I_n$.

b) Să se calculeze $I_0$ şi $I_1$.

c) Să se determine $\lim_{n \to \infty} I_n$

*Petre Năchilă, Ploieşti*

**6.** Calculati primitivele urmatoarei functii : $f(x)=x^2/(x \cdot \sin x+\cos x)^2$ unde $0< x<90^0$ .

*Vasile Coman, Valenii de Munte*

## *ARHIVA OLIMPIADELOR ŞI CONCURSURILOR ŞCOLARE*

### CLASA A V-A

***1.*** *Se consideră numărul natural:*

$A = (2^2 \cdot 25)^2 : [3^{101} : 3^{99} + (2^5 \cdot 2^7) : 2^{12}] + 110 \cdot (125^2 : 625 - 2^3 \cdot 2) + 7$

*Determinaţi* $n \in \mathbf{N}$ *pentru care* $2^n < A < 2^{n+1}$.

*Nicolae Angelescu*

**Rezolvare:** $A = (2^2 \cdot 5^2)^2 : (3^2 + 2^{12} : 2^{12}) + 110 \cdot (5^6 : 5^4 - 2^4) + 7$; $A = 1997$.

$2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$ deci $2^{10} < 1997 < 2^{11}$; $n = 10$.

**2.***Determinaţi cel mai mic multiplu de 7 care împărţit la 8 şi la 9 dă, de fiecare dată, restul 3.*

*Gheorghe Achim*

**Rezolvare:.** 7k – cel mai mic multiplu de 7; d = î · c + r, r < î.

$7k = 8 \cdot c_1 + 3$ şi $7k = 9 \cdot c_2 + 3 \Rightarrow 7k - 3 = m_{72}$; $7k = m_{72} + 3$.

$72 + 3 = 75 \not\vdots\, 7$; $72 \cdot 2 + 3 = 147 = 7 \cdot 21$

***3.*** *Pe o tablă sunt scrise numerele naturale de la 1 la 1000. Elevii A şi B şterg pe rând, începând cu A, câte un număr. Pierde elevul care este obligat să şteargă primul un multiplu al lui 2 sau un multiplu al lui 5. Care elev câştigă, A sau B? Justificaţi răspunsul.*

***

**Rezolvare:**

Fiecare elev trebuie sa evite numerele "periculoase", adica :multiplii lui 2 care sunt in numar de 1000:2=500, multiplii lui 5 care sunt in numar de 1000:5=200 .Printre aceste numere apar de doua ori multiplii lui 10 care sunt in numar de 100 .Prin urmare numerele " periculoase" sunt in numar de 500+200-100=600 .Avantajoase sunt numai 1000-600=400 numere . Deoarece jucatorul A este obligat sa stearga al 401-lea numar ,el va pierde.

***4.*** *Fie numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât* $n = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 1\frac{11}{12}$.

*Aflaţi numărul m dacă* $m = \frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{d}{d+c}$.

**Rezolvare:**

$$n+m=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+a}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+b}\right)+\left(\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+c}\right)+\left(\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+d}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+d}{c+d}+\frac{d+a}{d+a}=4 \quad m=4-n=4-1\frac{11}{12}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$$

**5.** *Aflati toate numerele naturale de trei cifre care, impartite la 67, dau restul egal cu cubul catului.*

*Boicescu Nazeli*

**Rezolvare.**

$\overline{xyz}=67c+r$,

r=1 $\Rightarrow$ c=1 $\Rightarrow$ $67\cdot 1+1=68\neq \overline{xyz}$

r=8 $\Rightarrow$ c=2 $\Rightarrow$ $\overline{xyz}=67\cdot 2+8=142$

r=27 $\Rightarrow$ c=3 $\Rightarrow$ $\overline{xyz}=67\cdot 3+27=228$

r=64 $\Rightarrow$ c=4 $\Rightarrow$ $\overline{xyz}=67\cdot 4+64=332$

***Clasa a VI-a***

***1.****Fie* $S=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\ldots+\frac{1}{x_{2007}^2}$, *unde* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2007}$ *sunt numere naturale nenule distincte. Arătați că* $S\neq 1$.

***

**Rezolvare:** Dacă unul dintre numerele $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2007}$ este egal cu 1, atunci, evident, $S>1$. Dacă $x_i\geq 2$, pentru orice $i\in\{1,2,3,\ldots,2007\}$, atunci, cum $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2007}$ sunt distincte, avem

$$S\leq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2008}<$$

$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2008}<1.$$

**2.*****a)*** *Demonstrați că* $\overline{dbca}$ *se divide cu 7 dacă și numai dacă* $\overline{bc}$ *se divide cu 7;*

***b)****Câte numere* $\overline{abcd}$ *divizibile cu 7 au proprietatea că și* $\overline{dbca}$ *este divizibil cu 7?*

***

**Rezolvare: a)** $\overline{abcd}=1001a+10\overline{bc}+(d-a)$. Cum $\overline{abcd}\,\vdots\,7$ şi $1001a\,\vdots\,7$, rezultă că $10\overline{bc}+(d-a)\,\vdots\,7$ (1). $\overline{dbca}=1001d+10\overline{bc}+(a-d)$.

Dacă $\overline{dbca}\,\vdots\,7$, atunci $10\overline{bc}+(a-d)\,\vdots\,7$ (2). Din (1)şi (2) rezultă că $\overline{bc}\,\vdots\,7$.

Reciproc, dacă $\overline{bc}\,\vdots\,7$, atunci din (1) rezultă $d-a\,\vdots\,7$, ceea ce implică $a-d\,\vdots\,7$ şi apoi avem, succesiv: $10\,\overline{bc}+(a-d)\,\vdots\,7$, $1001d+10\overline{bc}+(a-d)\,\vdots\,7$, adică $\overline{dbca}\,\vdots\,7$.

**b)**Conform punctului **a)**, avem: $\overline{abcd}\,\vdots\,7$ şi $\overline{dbca}\,\vdots\,7 \Leftrightarrow 10b+c\,\vdots\,7$ şi $d-a\,\vdots\,7$.
Din $10b+c\,\vdots\,7$ se deduce că $(b,c)\in\{(0,0);(0,7);(1,4);(2,1);\ldots;(9,1);(9,8)\}$, iar din $d-a\,\vdots\,7$ se obţine, având în vedere că *d* şi *a* sunt ambele nenule,
$(d,a)\in\{(9,2);(8,1);(1,8);(2,9);(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6);(7,7);(8,8);(9.9)\}$, deci există $15\cdot 13=195$ de numere cu proprietatea din enunţ.

***3.****Fie* $\hat{AOB},\hat{BOC},\hat{COD},\hat{DOA}$ *unghiuri în jurul unui punct. Se ştie că:* $2\cdot m(\hat{COD})-3\cdot m(\hat{AOB})=0$, $10\cdot m(\hat{BOC})=9\cdot m(\hat{DOA})$ *şi* $\frac{m(\hat{AOB})}{2}=\frac{m(\hat{BOC})}{9}$.
*Demonstraţi că:*
*a)(OB şi (OD sunt semidrepte opuse;*
*b)Bisectoarele unghiurilor* $\hat{AOB}$ *şi* $\hat{AOD}$ *sunt perpendiculare;*
*c)Dacă (OP este bisectoarea unghiului* $\hat{BOC}$ *şi (OQ este bisectoarea unghiului* $\hat{AOD}$, *aflaţi* $m(\hat{POQ})$.

*Viorica Preda*

**Rezolvare:** ***a)*** *Fie (OM bisectoarea* $\sphericalangle AOB$.

$$\frac{m(\sphericalangle AOB)}{2}=\frac{m(\sphericalangle BOC)}{9}=\frac{m(\sphericalangle COD)}{3}=\frac{m(\sphericalangle DOA)}{10}=\frac{360^0}{24}=15^0$$

$m(\sphericalangle AOB)=30^0$, $m(\sphericalangle BOC)=135^0$, $m(\sphericalangle COD)=45^0$,
$m(\sphericalangle AOD)=150^0$, $m(\sphericalangle BOD)=135^0+45^0=180^0\Rightarrow \sphericalangle BOD$ *este alungit.*

***b)*** $m(\sphericalangle MOQ)=\dfrac{m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle AOD)}{2}=90^0\Rightarrow OM\perp OQ$

***c)*** $m(\sphericalangle POQ)=\dfrac{135^0}{2}+30^0+\dfrac{150^0}{2}=172^0 30'$

***4.*** *Dispunem de o riglă negradată şi de un raportor de pe care s-au şters toate semnele care indică măsura unui unghi, cu excepţia semnului pentru* $7^0$. *Cum procedăm pentru a desena unghiuri cu măsurile de* $5^0$,*respectiv* $1^0$? *Justificaţi.*

*Ioana şi Gheorghe Crăciun*

**Rezolvare:** Construim $\sphericalangle AOB$ alungit, apoi de 13 ori unghiul de $7^0\Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOC)=91^0$, apoi de 12 ori unghiul de $7^0\Rightarrow m(\sphericalangle BOD)=84^0\Rightarrow$ $m(\sphericalangle COD)=180^0-91^0-84^0=5^0$. De la linia 0 a raportorului pun semn la $5^0$ şi măsor de 3 ori $5^0$ faţă de o semidreaptă, apoi de 2 ori $7^0$. Diferenţa este $15^0 - 14^0 = 1^0$.

***Clasa a VII-a***
*1. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia:* $x^2+x=5^y+1$.

*Petre Năchilă*

**Rezolvare:** Pentru x = 5k, k ∈ **Z**, nu există soluţie. Pentru x = 5k + 1, $25k^2 + 15k + 1 = 5^y$, deci k = y = 0 şi soluţia este (1; 0).
Pentru x = 5k + 2, $25k^2 + 25k + 5 = 5^y$, $5k^2 + 5k + 1 = 5^{y-1}$, deci k = 0 sau k = –1, y = 1. Deci x ∈ {–3; 2} şi avem soluţiile (2; 1) şi (–3; 1). Pentru x = 5k – 2, k = y = 0 şi avem soluţia (–2, 0). Pentru x = 5k – 1 nu avem soluţie. Deci avem cele patru soluţii.

***2.*** *Fie trapezul dreptunghic ABCD cu: $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$, $m(\sphericalangle ABC) = 60^0$, BC = 6 cm, CD = 9 cm şi perimetrul egal cu $27+3\sqrt{3}$ cm. Arătaţi că AC⊥BC şi aflaţi lungimea diagonalei AC.*

*Maria şi Anton Negrilă*

**Rezolvare:** . Fie CC'⊥AB, C'∈ AB. În Δ drept. CC'B, m ($\sphericalangle$BCC') = $30^0$ ⇒

C'B = $\frac{BC}{2}$ = 3 cm ⇒ AB = 12 cm. $CC' = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} = AD$.

Într-adevăr, perimetrul este 27 + $3\sqrt{3}$ cm. (Una din cele trei lungimi date în enunţ putea lipsi). Din Δ drept. ADC, $AC = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3}$ (cm).

$AB^2 = BC^2 + AC^2$ ($12^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2$). Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, AC⊥CB.

***3*** Arătaţi că: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} - 2\sqrt{2}\right)^{1998} = 0$.

(***)

**Rezolvare:**

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} - 2\sqrt{2}\right)^{1998} = \left(\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| - 2\sqrt{2}\right)^{1998} =$$

$$= \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)^{1998} = 0.$$

***4.*** *Se dau mulţimile* $A = \left\{x \in R \mid x = \sqrt{50 - 5\sqrt{n+1}}, n \in N\right\}$ *şi*

$B = \left\{y \in R \mid y = \sqrt{70 - 7\sqrt{n+1}}, n \in N\right\}$. *Calculaţi* $A \cap B \cap$ ***N***.

*Ioana şi Gheorghe Crăciun*

**Rezolvare.** $\sqrt{50 - 5\sqrt{n+1}} = k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow 50 - 5\sqrt{n+1} = k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} = \frac{50-k^2}{5}$; $50 - k^2 \ge 0 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$;

$\sqrt{70 - 7\sqrt{n+1}} = p$

$n = \left(\frac{70-p^2}{7}\right)^2 - 1 \Rightarrow 7 \mid p \Rightarrow p \in \{0,7\}$ .Deci B ∩ **N** = {0, 7}, iar A ∩ B ∩ **N** = {0}.

**Clasa a VIII-a**

***1.*** *Fie a, b, c, d numere reale., a+b≠ 0*

*a) Arătaţi că dacă $a + b = c + d$ şi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, atunci*

*$a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.*

*b) Arătați că dacă $a + b = c + d$ și $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, atunci $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.*

*Miron Oprea*

**Rezolvare:** a) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ şi $c^2 + d^2 = (c + d)^2 - 2cd$.

Cum $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ şi $a + b = c + d$, rezultă $ab = cd$.

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$ şi $c^3 + d^3 = (c + d)(c^2 + d^2 - cd)$. Cum $a + b = c + d$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ şi $ab = cd$, rezultă $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, $c^3 + d^3 = (c + d)^3 - 3cd(c + d)$ şi $a + b = c + d \neq 0$ rezultă $ab = cd$. Cum $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ şi $c^2 + d^2 = (c + d)^2 - 2cd$, rezultă $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

**2.** *Aflați restul împărțirii numărului $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 1997^3 + 1998^3 + 1999^3 + 2000^3$ la 667*

*Ioana și Gheorghe Crăciun*

**Rezolvare:**

$A = (1^3 + 2000^3) + (2^3 + 1999^3) + (3^3 + 1998^3) + (4^3 + 1997^3)$.

Deoarece $x+y \mid x^3+y^3$, fiecare paranteză se divide cu $2001 = 667\cdot 3$, deci $667|A$ şi deci restul este 0.

**3.** *Pe planul triunghiului ABC cu AB=10, BC=12, $m(\sphericalangle B)=60^0$ se ridică perpendiculara MA, MA=8. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, se cer:*

*a) lungimile segmentelor (AH), (HC') unde $C'\in(AB)$ și $CC'\perp AB$;*

*b) măsura unghiului format de dreapta MH cu planul (ABC).*

*Ion Lupea și Ion Tomescu*

***Rezolvare:***

$BC' = \frac{BC}{2} = 6 \Rightarrow AC' = 4$; În $\Delta$ drept. AA'B ($AA' \perp BC$), $m(\sphericalangle BAA') = 30^0$; $\cos 30^0 = \frac{AC'}{H} \Rightarrow AH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $C'H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. $\sphericalangle(MH,(ABC)) = \sphericalangle MHA$;

$\operatorname{tg} \sphericalangle MHA = \frac{8\cdot 3}{8\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\sphericalangle MHA) = 60^0$.

**4.** *Prisma ABCDA'B'C'D' este patrulateră regulată dreaptă. Diagonala BD' este $2\sqrt{51}$ cm și latura bazei AB este de $6\sqrt{2}$ cm. Dacă a este distanța de la punctul A la planul (A'BD), iar b este distanța de la C' la planul (A'BD), determinați a + b.*

*Mihail Focșeneanu*

**Rezolvare:**

Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $AC = BD = 12$, $AO = 6$, $DD' = 2\sqrt{15}$, $A'O = 4\sqrt{6}$.

$(A'AO)\perp(A'BD)$, $AE\perp A'O$, $E\in A'O \Rightarrow AE = d(A, (A'BD)) = a$;

$a = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Analog, $C'F\perp A'O \Rightarrow C'F = d(C', (A'BD)) = b$.

$A_{\Delta A'OC'} = \frac{A'C'\cdot OO'}{2} = \frac{A'O\cdot C'F}{2} \Rightarrow C'F = 3\sqrt{10} = b$; $a + b = \frac{9\sqrt{10}}{2}$.