

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

1. Să se determine valoarea maximă a expresiei: $E = \sqrt{\frac{b+c}{a}} - 1 + \sqrt{\frac{a+c}{b}} - 1 + \sqrt{\frac{a+b}{c}} - 1$ unde a,b,c sunt laturile unui triunghi oarecare.

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

2. Fie fracția $F(x,y) = \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}; x,y \in \mathbb{R}.$

- a) Simplificați fracția.
- b) Calculați $F(1,1)+F(2,2)+\dots+F(m,m), m \in \mathbb{N}^*$

Felicia Ozunu, Vulcan,Hunedoara

3. Rezolvați ecuația: $\sqrt{2x^2 + 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + 3x + 11} = 7.$

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

4. Fie predicatul $p(x,y): "x^3 - x = y^3 - y, x,y \in \mathbb{R}"$.
Determinați valoarea de adevar a propozițiilor:

- a) $(\forall x) x \in \mathbb{R} (\exists y) y \in \mathbb{R}$ astfel incat are loc $p(x,y)$.
- b) $(\exists y) y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ astfel incat are loc $p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right)$.
- c) Fiind dat si predicatul $q(x,y): "x \neq y, x,y \in \mathbb{R}"$, sa se determine toate elementele multimii: $M = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / p(x,y) \wedge q(x,y)\}$

5. Se consideră dreapta $d: 2x - 3y + 10 = 0.$

- a) Determinați punctul de intersecție al dreptei d cu prima bisectoare.
- b) Calculați aria triunghiului determinat de dreapta d , prima bisectoare și axa Oy.
- c) Aflați ecuația simetricii dreptei d față de prima bisectoare.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-2| + 3.$

- a) Reprezentați grafic funcția f .
- b) Analizând graficul, stabiliți intervalele de monotonie și $\text{Im}f$.

7. Rezolvați în \mathbb{N}^* ecuația $x^{x-1} - 1 = (x-1)^3.$

Stănică Nicolae, Braila

Clasa a X-a

1. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem: $\text{tg} \frac{A}{2} \cdot \text{tg} \frac{B}{2} \cdot \text{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{4R+r}{9p}.$

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

2. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem: $a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 \geq 6pr^2$

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

3. a) Să se demonstreze următoarea identitate peste \mathbb{C} :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
 b) Dacă $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ și $|z_1| = |z_2| = 1$ atunci și $|z_1 - z_2| = 1$.

4. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitatea:
 $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 + 14 \geq 2 \cdot (3x + 4y + 5z)$,
 și să se precizeze când are loc egalitatea

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

5. Sa se rezolve in \mathbb{R} ecuatia:
 $\log_2(\sin x) + \log_3(\operatorname{tg} x) = \log_4(\cos^2 x) + \log_5(\operatorname{ctg} x)$

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

6. Calculați numărul complex:

$$\left(\frac{5+13i}{9+4i}\right)^{2007} + \left(\frac{3+i}{1+2i}\right)^{2007}.$$

7. Demonstrați ca ecuatia urmatoare : $[ax^2 - bx + c] = [-ax^2 + bx + c]$ are doar doua radacini reale, oricare ar fi a și b numere reale nenule și oricare ar fi c un numar intreg. Am notat cu $[x]$ partea intreaga a numarului real x. Generalizare pentru o ecuatie de gradul 3.

Coman Vasile, Valenii de Munte

Clasa a XI-a

1. Se consideră o matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $\det(A) = k^2, k \in \mathbb{N}$.
 Să se demonstreze că, dacă $\operatorname{tr}(A) + 2k \neq 0$ sau $\operatorname{tr}(A) - 2k \neq 0$, atunci există $\alpha \in \mathbb{Z}^*, X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^2 = \alpha A$. Să se dea un exemplu de matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}), A \neq O_2$, care are proprietatea că, pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, ecuația $X^2 = \alpha A$ nu are soluții $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

2. Determinați $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă care verifică ecuația:
 $f(x+y) = 2(f(x) + f(y)) - 9$ oricare x, y numere reale.

Ionela Poescu, Câmpulung Muscel, Aregeș

3. Fie n un număr natural nenul. Să se rezolve în $M_3(\mathbb{R})$ ecuația

$$X^{2n+1} + X^{2n} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin
 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, 27x_{n+3} + 18x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n + n = 0$

Petre Năcbilă, Ploiești

5. Calculați limita

$$l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m + a^m - 2a \cdot x^{m-1}}{x^n + a^n - 2a \cdot x^{n-1}} \quad ; m, n \in \mathbb{N} \quad m, n \geq 3.$$

6. Definim sirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ prin $x_0 > 0, y_0 > 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + y_n x_n^2}$,
 $y_{n+1} = y_n (1 + x_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Sa se arate ca sirul $(z_n)_{n \geq 0}, z_n = x_n \cdot y_n$ este convergent si
 determinati $\lim_{x \rightarrow \infty} z_n$.

7. Rezolvati in \mathbb{R} ecuația $a^{2x} + a^{\frac{2}{x}} = 2a^2, a > 0, a \neq 1$.

Vasile Coman, Valenii de Munte

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea finită M considerăm operația asociativă "o", care are proprietatea că există $a \in M$ astfel încât $x \circ y \neq a, (\forall) x, y \in M$ și

$$a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, (\forall) x_1, x_2 \in M \setminus \{a\}.$$

Să se arate că există $b \in M \setminus \{a\}$ astfel încât $a \circ a = b \circ b$ și să se dea un exemplu de o operație cu această proprietate definită pe o mulțime cu trei elemente.

2. Să se demonstreze că: $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2004}}}{2005^x + 1} dx \leq \sqrt{\frac{2006}{2005}}$.

Florin Nicolaescu, Balș

3. Fie $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ cu $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{8}$. Să se demonstreze că $z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

Cătălin Năcbilă, Ploiești

4. Să se demonstreze inegalitatea: $x^2 + x^3 \arctg x > (1 + \frac{3}{2}x^2) \ln(1 + x^2), \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Corneliu Mănescu -Avram, Ploiești

5. Determinați toate perechile (a,b) de numere reale pentru care avem relația:

$$2^{ax} + 3^{bx} = a \cdot 2^{x+a-1} + b \cdot 3^{x+b-1}, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Cristian Luca, Ploiești

6. Aratati ca in mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este un grup față de adunarea matricilor.

7. Fie $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (e^{-x^2} \arctg x^n) / (1 + x^{2n})$. Calculati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^1 f(x) dx}{n} \right)$.

Vasile Coman, Valenii de Munte

