



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„SFERA”, EDIȚIA a V-a, BĂILEȘTI
22 martie 2008

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă $S = \sum_{n=1}^{1000} [\sqrt{n}]$, unde $[\sqrt{n}]$ este partea întreagă a lui \sqrt{n} atunci:
a) $S=20000$ b) $S=20001$ c) $S=20615$ d) $S=20715$
2. Numărul soluțiilor reale ale ecuației $2008(x-1) + [x] = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x , este:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
3. Dacă $S = \sum_{m \in A} m$, unde $A = \{m \in \mathbb{Z} / \text{ecuația } x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \text{ admite o rădăcină întreagă}\}$ atunci:
a) $S=7$ b) $S=1$ c) $S=10$ d) $S=0$
4. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = xy + yz + zx$ și $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$.
Dacă $P = xyz$ atunci:
a) $P=0$ b) $P = \frac{1}{2}$ c) $P=1$ d) $P=2$
5. Fie ABCDEF un hexagon regulat și punctele $M \in (AC), N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Valoarea lui k pentru care punctele B, M, N sunt coliniare este:
a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Probleme propuse de prof. Cătălin Cristea, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

1. Fie M mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC. Notăm cu I și J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABM și ACM. Dacă $m(\angle AIB) - m(\angle MIJ) = 90^\circ$, să se demonstreze că $[AB] \equiv [AC]$.

Prof. Marius Perianu, prof. Florian Dumitrel, Slatina, Sfera nr. 8

2. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq a^4 + b^4 + c^4 + \frac{3}{4}.$$

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

Barem de notare-clasa a IX-a

I. 1. c) 2. a) 3. b) 4. c) 5. d)

II.

1. Deoarece $m(\widehat{AIB}) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\widehat{AMB}) = 90^\circ + m(\widehat{IMB})$, rezultă că $\widehat{IMB} \equiv \widehat{MIJ}$, deci $IJ \parallel BC$. Atunci

există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{IJ} = \lambda \vec{BC} = \lambda \vec{AC} - \lambda \vec{AB}$. (1)

Notăm $AM = m$, $AB = c$ și $AC = b$. Atunci

$$\vec{AI} = \frac{c\vec{AM} + m\vec{AB}}{m + c + \frac{a}{2}} \quad \text{și} \quad \vec{AJ} = \frac{b\vec{AM} + m\vec{AC}}{m + b + \frac{a}{2}}.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \vec{AJ} - \vec{AI} = \frac{b\vec{AM} + m\vec{AC}}{m + b + \frac{a}{2}} - \frac{c\vec{AM} + m\vec{AB}}{m + c + \frac{a}{2}} = \\ &= \alpha \left(\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} - m^2 \right) \vec{AB} + \alpha \left(\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} + m^2 \right) \vec{AC}, \quad (2) \end{aligned}$$

unde $\alpha = \frac{1}{(m + c + \frac{a}{2})(m + b + \frac{a}{2})}$ (am folosit $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$).

Relațiile (1) și (2) conduc la

$$\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} - m^2 = - \left(\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} + m^2 \right),$$

de unde $b = c$.

$$2. a\sqrt{ab} = \sqrt{a^2 \cdot ab} \leq \frac{a^2 + ab}{2} \quad (4p)$$

$$\text{Analog } b\sqrt{bc} \leq \frac{b^2 + bc}{2}, \quad c\sqrt{ca} \leq \frac{c^2 + ca}{2}. \quad (4p)$$

$$\text{Prin adunare avem că } a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2}. \quad (2p)$$

Folosind rezultatul cunoscut $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ obținem că

$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \left(a^4 + \frac{1}{4}\right) + \left(b^4 + \frac{1}{4}\right) + \left(c^4 + \frac{1}{4}\right) = a^4 + b^4 + c^4 + \frac{3}{4}. \quad (8p)$$

$$\text{Egalitatea se realizează pentru } a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2p)$$