CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„SFERA”, EDIȚIA a V-a, BĂILEŞTI

22 martie 2008

SUBIECTE CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră funcțiile liniare $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$ şi $g(x) = -\frac{2}{3}x + 3$, ale căror grafice, reprezentate în acelaşi sistem de axe ortogonale xOy sunt dreptele *d* şi *g*.
Dacă T şi K sunt proiecțiile lui O pe *d* respectiv *g*, atunci lungimea segmentului [KT] este de :
a) 3cm; b) $3\sqrt{2}$ cm; c) 1,5 cm; d) $\sqrt{6}$ cm.

2. În piramida patrulateră regulată VABCD se ştie latura bazei $AB = 30$ cm, înălțimea piramidei $VO = 20$ cm, E este simetricul lui O față de B. Distanța de la punctul E la planul (VAD) este:
a) 30 cm; b)15 cm; c) 36 cm; d) $20\sqrt{2}$ cm.

3.Fie ecuația cu necunoscutele *x*, *y* şi *z*: $\frac{x+y+z}{2} = \sqrt{x+5} + 2\sqrt{y+2} + 3\sqrt{z+1} + m$, unde *m* este număr real.
Valoarea minimă a lui *m* pentru care ecuația are soluții reale este:
a) 8; b) -22; c) 20; d) -11.

4.Se dă trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $AD \perp BC$ şi $AB - CD = BC\sqrt{2}$. În punctul T, piciorul înălțimii din C pe AB, se ridică perpendiculara KT pe planul trapezului, $KT = AD\sqrt{3}$ .Unghiul determinat de planele (KBC) şi (ABD) are măsura de:
a) 45^o; b) 60^o; c) 30^o; d) 90^o.

5. Se dau mulțimile $A = \left\{ x_n \in \mathbf{Q} \middle| x_n = \frac{5n+6}{3n+2}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$, $B = \left\{ y_p \in \mathbf{Q} \middle| y_p = \frac{5p+12}{3p+4}, p \in \mathbf{N}^* \right\}$ şi
$C = \left\{ (n;p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \middle| x_n \in A, y_p \in B, x_n - y_p = 0 \right\}$.Mulțimea C are:
a) 15 elemente; b) 8 elemente; c) 24 elemente; d) o infinitate de elemente.

Probleme propuse de prof. Marian Firicel, Calafat

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 şi 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

1.Dacă $x, y \in (0;+\infty)$, $a \in [0;1]$ şi $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{y+a} \geq 1$, arătați că

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{4}{(1-a)(x+y) + a(2-a)}.$$

Prof. Mihail Bencze, Braşov, Sfera nr. 10

2. Fie ABCDEFGH un cub cu lungimea muchiei de 6 cm, P un punct pe segmentul (DF) astfel ca BP=6 cm.
a) Calculați distanța de la centrul de simetrie al cubului la planul (ACP);
b) Aflați măsura unghiului planelor (ADG) şi (CDF).

Prof. Marian Firicel, Calafat

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a VIII-a

Partea I

1. a); **2.** c); **3.** d); **4.** b); **5.** d);

Partea a II-a

1. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}\geq 1$

$\Rightarrow\ (1-a)(x+y)+a(2-a)\geq xy$ (1)……………………10p

Dar $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{4}{xy}$ (2)..5p

Folosind (1) şi (2) obţinem $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{4}{(1-a)(x+y)+a(2-a)}$ ………………5p

2.

ABCD pătrat, rezultă $AC\perp BD$ (1) **0,50p**

$FB\perp(ABC)$, $AC\subset(ABC)$, rezultă $FB\perp AC$ (2) **0,50p**

Din (1) şi (2) obținem $AC\perp(BDF)$ **0,50p**

$AC\perp(BDF)$, $DF\subset(BDF)$, rezultă $AC\perp FD$ **0,50p**

$BD=6\sqrt{2}cm$ **0,50p** $FD=6\sqrt{3}cm$ **0,50p**

În triunghiul *BDF,* dreptunghic în B, $\cos(B\hat{D}F)=\frac{BD}{DF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ **1p**

Se aplică teorema cosinusului în triunghiul *PDB*, notând cu *PD=x*, obţinându-se ecuația $x^2-8\sqrt{3}x+36=0$, care se scrie în continuare $(x-2\sqrt{3})(x-6\sqrt{3})=0$, de unde se obține $x_1=2\sqrt{3}$ şi $x_2=6\sqrt{3}$. Soluția x_2 nu convine pentru că în acest caz punctul P coincide cu F ceea ce contrazice ipoteza $P\in(FD)$. Deci $x=DP=2\sqrt{3}$ **2p**

În triunghiul *DOP* se aplică teorema cosinusului şi se află $OP=\sqrt{6}cm$ **2p**, apoi reciproca teoremei lui Pitagora, de unde deducem că *OP* este perpendiculara pe *DF* **2p**

Din $DF\perp OP$, $DF\perp AC$, $AC,OP\subset(ACP)$ **1p**

Centrul de simetrie *I* al cubului este intersecția diagonalelor lui şi se află la mijlocul fiecărei diagonale deci, *I* este pe [*FD*], astfel că *ID=IF=DF*/2=$3\sqrt{3}cm$ **0,50p**

Cum $IP\perp(ACP)$, $P\in(ACP)$, distanța de la *I* la planul (*ACP*) este $IP=ID-DP=\sqrt{3}\ cm$ **0,50p**

$AD\parallel FG$ rezultă $(ADG)=(ADGF)$ şi $(ADG)\cap(CDF)=DF$ **1p** *DF* este perpendiculara pe planul , deci dreapta DF este perpendiculară pe *AP* şi *CP* **1p** Din $DF\perp AP, DF\perp CP,\ AP\subset(ADG), CP\subset(CDF), (ADG)\cap(CDF)=DF$ se obține că unghiul planelor (*ADG*) şi (*CDF*) este unghiul dreptelor *AP* şi *CP* **2p.** $AC\perp(BDF), OP\subset(BDF)\ \Rightarrow AC\perp OP$ **1p .** În triunghiul PAC, [PO] este înălțime şi mediană, deci este isoscel cu *PA=PC*, iar unghiurile *APO* şi *CBO* sunt congruente. **1p** . Se foloseşte o funcție trigonometrică în triunghiul , măsura ungiului APO este de 60°, deci măsura unghiului *APC* este de 120°. Atunci unghiul dreptelor *AC* şi *CP* este de 180°+120°=60°, deci unghiul planelor (*ACD*) şi (*CDF*) este de 60°. **2p**