Inspectoratul Şcolar Județean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a V-a
Varianta 2

1. **Suma dintre dublul primului numar si triplul de-al doilea este 2488. Impartind primul numar la sfertul celui de-al doilea obtinem catul 3 si restul 2. Aflati cele doua numere.**

2. a) Cate numere naturale cuprinse intre 1909 si 2105 sunt divizibile cu 10?
b)Determinati suma numerelor naturale cuprinse intre 1909 si 2105 care impartite la 28 dau restul 5 si impartite la 35 dau restul 12.

3. Fie A = $2008^{2009} + 2009^{2009} + 2006^{2008}$ şi
B= $2010 \cdot 2009 - 2009 \cdot 2008 - 2 \cdot 2008 + 2 \cdot 2007 - 2 \cdot 2006$
Stabiliți dacă numerele A şi B sunt pătrate perfecte.

4. Se da numarul $A = 5^n + 6^{n^2} + 7^{n^2+n}$, unde n$\in N*$.
a) Aratati ca $n^2 + n$ este numar par;
b) Aflati ultima cifra a numarului A.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Subiecte selectate de prof. Costache Aurelian

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a V-a
Varianta 2
Barem de corectare

1.reprezinta numerele..2p
reprezinta suma..2p
afla sfertul celui de-al doilea................................1p
finalizeaza...2p

2.a)scrie primul si ultimul nr.....................................1p
Calculeaza cate sunt..1p
b)afla forma generala a numerelor..........................2p
afla cate numere sunt..1p
finalizeaza...2p

3.calculeaza U(2008^{2009}) ,U(2009^{2009}),U(2006^{2008})....3p
Finalizeaza A...1p
Calculeaza B..2p
Finalizeaza B...1p

4.a)$n^2+n=n(n+1)$ si discuta..2p
b)calculeaza fiecare cate ....1p=3p
finalizeaza...2p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

OLIMPIADA de MATEMATICĂ
Faza locală 17 februarie 2008
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

1. Raportul dintre preţul unui caiet şi preţul unei cărţi este $\frac{2}{15}$. Ştiind că suma dintre dublul preţului caietului şi triplul preţului cărţii este 39,2 RON, să se afle: a) preţul caietului şi preţul cărţii; (4 puncte)

b) cu cât la sută din preţul caietului este mai mare preţul cărţii. (3 puncte)

***

2. Determinaţi cifrele a şi b ştiind că media aritmetică a numerelor $\overline{aabb}, \overline{aba}, \overline{ba}$ şi b este 625.

G.M. 11/2007

(7 puncte)

3. Punctul C este mijlocul segmentului (AB) şi punctul B este mijlocul segmentului (CD). Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

$p_1 : "CD = \frac{AD + BC}{2}";$ (4 puncte)

$p_2 : "\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} \geq \frac{2}{AC}"$ (3 puncte)

4. Fie punctul O$\in$ XY. De aceeaşi parte a dreptei XY se duc semidreptele (OA si (OB astfel încât m (<AOB) = 90^0, (OA $\subset$ int $\angle$ XOB. Dacă (OC şi (OD sunt bisectoarele unghiurilor <XOB, respectiv <AOY, arătaţi că măsura unghiului <COD este constantă.

***

(7 puncte)

Probleme selectate de prof. MARIANA RĂDULESCU

Nota:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

OLIMPIADA de MATEMATICĂ
Faza locală 17 februarie 2008
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

Barem de corectare şi notare

1. a) $\frac{x}{y}=\frac{2}{15}$, unde x este preţul caietului şi y preţul cărtii 1p

$2x + 3y = 39{,}2$ 1p

$x = 1{,}6$ RON 1p

$y = 12$ RON 1p

b) $x + p\% \cdot x = y$ 1p

finalizare $p\% = 650\%$ 2p

2. $\frac{\overline{aabb}+\overline{aba}+\overline{ba}+b}{4}=625$ 1p

$\frac{1100a+11b+101a+10b+10b+a+b}{4}=625$ 2p

$1202a + 32b = 2500$ 1p

$\Rightarrow a \in \{1, 2\}$ 1p

Finalizare a = 2 şi b = 3 .... 2p

3. AC = CB = BD = x 1p

P_1: $CD=\frac{AD+BC}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{3x+x}{2} \Leftrightarrow 2x=2x$ (A) 3p

P_2: $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\geq\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{11}{6x}\geq\frac{12}{6x}$ (F) 3p

4. Notăm m(<XOA) = 2x şi m(<YOB) = 2y 1p

m(<XOC) = m(<COB) = $x + 45^0$ 1p

m(<AOD) = m(<DOY) = $y + 45^0$ 1p

m(<AOC) = $45^0 - x$; m(<BOD) = $45^0 - y$ 1p

m(<COD) = x + y 1p

$2x + 90^0 + 2y = 180^0$ 1p

Finalizare: m(<COD) = 45^0 (constant) 1p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008

Clasa a VII-a
Varianta a II-a

1. a) Demonstraţi că $\sqrt{1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008} \notin \mathbf{Q}$.

b)Dacă $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$, demonstraţi că $\frac{1}{2}<S<1$.

2. Fie a,b,c numere reale positive astfel încât: $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Arătaţi că:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbf{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Q}$.

3. Fie ABCD un paralelogram. Notăm cu M punctul in care se intersectează bisectoarele unghiurilor A şi D şi cu N punctul in care se intersecteaza bisectoarele unghiurilor B şi C.

a) Calculati masura unghiului AMD;

b) Demonstraţi că MN||AB.

4. Se dă ΔABC cu AB=4cm, BC=6cm, AC=5cm. Prelungim latura [AB] cu segmentul [BD], BD=6cm şi latura [AC] cu segmentul [CE], CE=3cm.

a) Calculati lungimea segmentului [DE];

b) Dacă {M}=BC∩DE, calculaţi PΔMCE.

Subiecte selectate de prof. Dumitru Borocan

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru :3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008

Clasa a VII-a

Varianta a II-a

1 Soluţie:

a) Ultima cifră a produselor: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5, 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6, ..., 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008$ este 0---(1p)

Ultima cifră a numărului $n = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + ... + 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008$ este 3 --(1p)

Deoarece U(n)=3 $\Rightarrow$ n nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{n} \notin$ **Q**---------------(1p)

b) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{100} - 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{100}\right) =$ -------------------------(1p)

$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + ... + \frac{1}{100}$ --(1p)

$S < 50\cdot\frac{1}{50} = 1$---(1p)

$S > 50\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{2}$ --(1p)

2Soluţie:

$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k \Rightarrow a = k(b+c), b = k(a+c), c = k(a+b)$ ------------(1p)

$\Rightarrow a+b+c = k(2a+2b+2c) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ --(1p)

sau $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$ ---(2p)

$2a = b+c, 2b = a+c, 2c = a+b$ ---(1p)

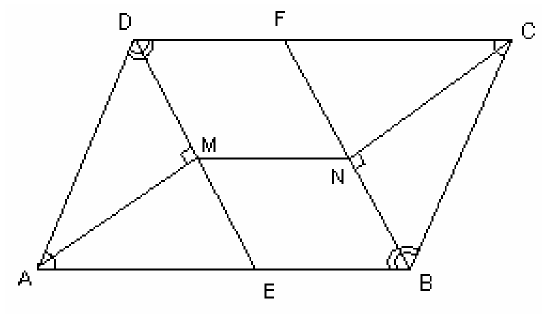
$2b = a + \frac{a+b}{2} \Rightarrow b = a$ ---(1p)

$2c = a + \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = a$ ---(1p)

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1 \in$ **Q**-----------------------(1p)

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \in$ **R-Q**-----------------------(1p)

3.Soluție:



a) $m(<AMD)=180^0-\left(\dfrac{m(<A)+m(<D)}{2}\right)=180^0-\dfrac{180^O}{2}=90^O$--------------------------------(2p)

b) Notăm {E}=DM∩AB si {F}=BN∩DC.

ΔAMD≡ΔAME (ULU)$\Rightarrow$M este mijlocul segmentului [DE] si $ME=\dfrac{DE}{2}$.

Analog $BN=\dfrac{BF}{2}$ --(1p)

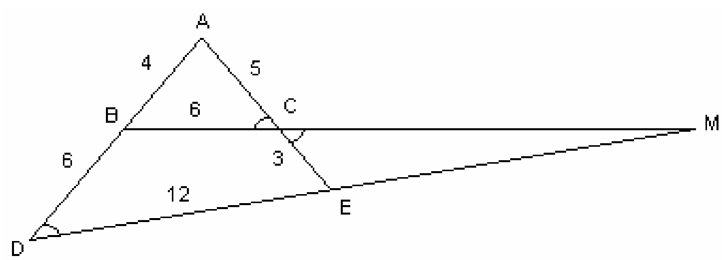
[AE] ≡ [AD] ≡ [BC] ≡ [CF] $\Rightarrow$[BE] ≡ [DF]--(1p)

BE||DF şi [BE] ≡ [DF] $\Rightarrow$BEDF paralelogram---(1p)

ME||BN şi [ME] ≡ [BN] $\Rightarrow$MEBN paralelogram--(1p)

$\Rightarrow$MN||BC--(1p)

4.Soluție:



$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2},\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$ (1)---(1p)

Din (1) şi <BAC≡<EAD$\Rightarrow$$\Delta$BAC~$\Delta$EAD (2)---(1p)

DE=12cm ---(1p)

Din (2) $\Rightarrow$<ACB≡<D---(1p)

Din <MCE≡<MDB şi <EMC≡<BMD $\Rightarrow$$\Delta$MEC~$\Delta$MBD-------------------------------(1p)

$\dfrac{MC}{MD}=\dfrac{CE}{DB}=\dfrac{ME}{MB}$ ---(1p)

$\dfrac{MC}{ME+12}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{ME}{MC+6}\Rightarrow 2MC=ME+12$ şi $2ME=MC+6\Rightarrow ME=8cm, MC=10cm$ -------(1p)

ISJ. Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a VIII-a
Varianta 2

1. **a) Fie a,b,c $\in$ Q* astfel încât a + b + c = 0 . Demonstraţi că**

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \in \mathbf{Q}.$$

b) Calculaţi $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2007^2}+\frac{1}{2008^2}}$.

2. **Un pătrat cu latura de n cm , n $\in$ N* , se împarte în n^2 pătrate cu latura de 1 cm şi în fiecare dintre aceste pătrate se înscrie câte un cerc tangent laturilor pătratului în care se înscrie. Fie a numărul punctelor de tangenţă ale cercurilor între ele .**

a) Determinaţi a pentru n = 6 .

b) Care este probabilitatea ca , pentru $2 \le n \le 2008$, n arbitrar ales , numărul 2a să fie pătrat perfect ?

3. **Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată în care VA $\perp$ VC , d = (VAB) $\cap$ (VDC) şi g = (VBC) $\cap$ (VAD) .**

c) Arătaţi că (d , g) // (ABC) .

d) Aflaţi m ($\angle$ VAB) .

e) Fie M $\in$ [VB] astfel încât oricare ar fi punctul P $\in$ [VB] , AM + MC $\le$ AP + PC . Calculaţi lungimea segmentului BM ştiind că AB = 2 a cm .

4. **Pe planul triunghiului isoscel ABC ([AB] $\equiv$ [AC]) se duce perpendiculara în G (centrul de greutate) şi se ia pe acesta un punct D . Fie punctul N $\in$ [AB] astfel încât**

$\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$ **; prin N se duce un plan α // (DBC) care intersectează DG în Q .**

f) Stabiliţi valoarea raportului $\frac{GQ}{GD}$**.**

g) Determinaţi m($\angle$(α , (ABC))) ştiind că $DG = \frac{AM}{3}$ **, unde *M* este mijlocul lui [BC].**

Subiecte propuse de prof.Codeci Daniel.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru : 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Olimpiada de matematică, etapa locală,17.02.2008
clasa a VIII-a
BAREM DE CORECTARE, Varianta 2

1. a) Din a + b + c =0 $\Rightarrow$ $\frac{2(a+b+c)}{abc}$ **= 0** $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ab}$ **= 0** $\Rightarrow$ **……………1p**

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ab}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2$ $\Rightarrow$ **……………2p**

$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|\in \mathbb{Q}$ **…………… 1p**

b) În relaţia de la punctul a) se consideră a = 1 , b = k – 1 ,c = - k , cu a + b + c = 0 $\Rightarrow$

$\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=\left|\frac{1}{1}+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right|=1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ **…………… 1p**

În această relaţie se consideră k = 2,3 ,…,2008 şi se obţine :

$S=1+\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2008-1}-\frac{1}{2008}=$ **……. 1p**

$=2007+1-\frac{1}{2008}=\frac{4032063}{2008}$. **……………….. 1p**

2. a) Se constată că punctele de tangenţă căutate coincid cu mijloacele laturilor pătratelor de
lungime 1,cu excepţia celor situate pe laturile pătratului mare.

Pentru cazul n = 6 , în reţeaua celor 36 pătrate mici obţinute , punctele căutate se pot număra astfel : pe fiecare dintre cele 5 paralele orizontale la latura pătratului iniţial se găsesc
câte 6 puncte , deci 5 .6 = 30 puncte .Analog , pe cele 5 paralele verticale se află tot 30 puncte. În total sunt a = 30 . 2 = 60 puncte .

………………….se punctează 2p răspunsul corect(60puncte) şi 2p justificarea (oricare ar fi).

b) Pentru cazul general , printr – un raţionament asemănător celui de la punctul a) ,se obţine că sunt : a = (n – 1) . n .2 = 2n(n-1) puncte $\Rightarrow$ **……………………………1p**

2a = 4n(n-1)

cum: (n-1)^2 < n (n – 1) <n^2 $\Rightarrow$ **n (n – 1) nu poate fi pătrat perfect** $\Rightarrow$ **………………1p**

2a = 2^2 .n (n – 1) nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi n $\in$ **N , n**$\geq$**2** $\Rightarrow$ **p=0 ………….. 1p**

3.a)Din d = (VAB) $\cap$ **(VDC) ,AB**$\subset$**(VAB) , DC** $\subset$**(VDC) , AB // DC**$\Rightarrow$**d // AB …. 1p**

Analog se obţine că g //AD . Cum AB $\subset$ **(ABC) , AD**$\subset$ **(ABC)** $\Rightarrow$**(d , g) // (ABC) ….1p**

b) Se obţine că Δ**VAC şi** Δ**ABC sunt dreptunghice isoscele , cu ipotenuza AC comună , deci sunt congruente ,de unde rezultă că : [VA]** $\equiv$ **[AB]** $\equiv$ **[VB]** $\Rightarrow$ Δ**VAB echilateral** $\Rightarrow$

m ($\angle$ **VAB) = 60^0. …………………………2p**

c) Se desfăşoară fețele laterale VAB şi VBC ale piramidei în acelaşi plan. Punctul M căutat este la intersecția segmentelor AC şi VB , pentru că în ΔACP , AM + MC = AC $\leq$ AP+ PC
oricare ar fi poziția punctului P $\in$ [VB]. **………………………. 2p**

Cum ΔVAB şi ΔVBC sunt echilaterale $\Rightarrow$ ABCV- romb $\Rightarrow$ BM = $\frac{VB}{2}$ **= a cm. .. .1p**

4. a) Fie mediana AM a ΔABC , $\alpha \cap$ AM = {R} , $\alpha \cap$ AC = {P}. Din $\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{7}{9}$ **, din α // (DBC) $\Rightarrow$ NP // BC şi QR //DM $\Rightarrow$ ……………………. 1p**

$\frac{NP}{BC} = \frac{7}{9} = \frac{AR}{AM} \Leftrightarrow \frac{2GM+GR}{3GM} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{2GM+GR}{2GM} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ **…….. 1p**

$\frac{GQ}{GD} = \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3}$ **……………………….. 1p**

b)

m($\angle$(α , (ABC))) = m($\angle$((DBC),(ABC))) = m($\angle$DMA) …………………………. 2p

Din

DG = $\frac{AM}{3}$ **$\Rightarrow$ [DG]$\equiv$ [GM] $\Rightarrow$ ΔDGM dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ m($\angle$DMG) = 45^0 … 2p**