

SPIRITUL LUI GHEORGHE ȚIȚEICA ...

Prof. Olimpia Popescu, Ploiești

La 5 februarie 2009, s-au împlinit 70 de ani de la moartea marelui matematician și om de cultură Gheorghe Țițeica.

Născut la 4 octombrie 1873, la Turnu-Severin, urmează liceul la Craiova unde obține rezultate strălucite la învățătură, excelând însă la matematică. Era permanent premiantul I al clasei, iar la bacalaureat a uimit comisia prin pregătirea temeinică sa la toate disciplinele. După absolvirea liceului, în 1892, urmează cursurile Facultății de Științe de la Universitatea din București, pe care a absolvit-o în 1895.

Gheorghe Țițeica, pentru stilul său modest, cumpănit, de om al echilibrului și al corectitudinii, cu o înaltă pregătire științifică, a fost apreciat elogios de profesorii săi precum: Spiru Haret, David Emanuel, Constantin Gogu, Dimitrie Petrescu, generalul Iacob Lahovary ș.a.

Pentru Gheorghe Țițeica, ca și pentru multe alte generații, modelul de profesor talentat, sobru și de o exactitate proverbială a fost Spiru Haret. Așa se face că în revista "*Natura*" nr.9 din 1914, Țițeica îi dedică acestuia un articol elogios. De asemenea, în discursul de investitură de la Academia Română, își elogiază toți profesorii, dar îndeosebi pe Spiru Haret.

După absolvirea Facultății de Științe din București, în 1895, pleacă la Paris, la Școala Normală Superioară pe care a absolvit-o cu rezultate excelente, fiind primul dintre licențiații francezi și străini și fiind prețuit și admirat de colegi și de profesori, mari matematicieni precum: Gaston Darboux, Henri Poincaré, Henri Lebesgue, Jaques Hadamard, Paul Montel ș.a. Mai mult, Lebesgue și Paul Montel i-au dedicat articole elogioase în presa vremii, atât în Franța cât și în România. Și Gheorghe Țițeica și-a prețuit profesorii și școala din Paris. O dovadă este faptul că, în 1926, când, pentru faima sa de mare om de știință, este invitat să țină conferințe la Sorbona din Paris și i se ofereau condiții deosebite, a dorit să locuiască într-o cameră modestă de elev, să retrăiască anii de studiu și de muncă asiduă. La fel, o dovadă a caracterului său modest, de om care își iubește familia este că atunci când pleacă la Paris la studii, jumătate din salariul său îl lasă în țară mamei sale pentru a-și ajuta cele trei surori.

Chiar dacă a cunoscut gloria și aprecierea autorităților vremii, a rămas modest, model de comportare în universitate, fiind apropiat și sincer cu colegii săi. Poate că în contextul actual, asemenea modele morale ar trebui mai mult cunoscute de elevi, studenți și chiar și de profesori.

Pentru prestigiul său științific și moral a fost ales decan al Facultății de Științe de la Universitatea din București (1919-1923) și președinte al Comisiei Române de la Institutul de Cooperare Culturală a Societății Națiunilor de la Geneva. A fost membru al unor prestigioase Academii, precum cele din: *Maryland, Liège, Varșovia* ș.a. A fost președinte al Societății Matematice din România, președinte al Societății de Științe din România, iar pentru mulți ani a fost membru în consiliul superior al Instrucțiunii Publice. În aceste condiții, a contribuit la perfecționarea învățământului românesc, la organizarea Universității din Cluj și la încadrarea acesteia cu profesori de mare valoare științifică. Era cunoscut și apreciat în lumea matematică mondială, reprezentând România la *Congresele internaționale de matematică*, precum cele din Toronto (1924), Zürich (1932), Oslo (1936), fiind ales președinte al secției de geometrie.

Academia Română, în afară de faptul că l-a primit ca membru în 1913, iar, pentru o perioadă, a fost chiar vicepreședintele ei, în 1941 i-a dedicat un volum omagial intitulat "*Operele lui Gheorghe Țițeica*", care evidențiază rezultatele care l-au propulsat în fruntea geometriilor mondiali.

Lecțiile sale de la Facultatea de Științe, de la Școala Politehnică din București sau alte conferințe extrașcolare erau magistrale. Datorită acestui fapt, George St. Andonie, în lucrarea "*Istoria Matematicii în România*" (1965), spune "*Păcat că nu s-au publicat la timpul lor nici lecțiile celebre ale lui Țițeica, nici cuvântările sale pline de avânt de la Casele Naționale. Ele ar fi fost o comoară suflătoare pentru noua generație care n-a avut norocul să-l asculte pe Țițeica*". Autorul acestei istorii îl compară pe

Țițeica cu Vasile Pârvan și Nicolae Iorga. Nici un cuvânt din prelegerile sale nu era sub semnul improvizăției de moment, ci toate ideile dintr-o conferință erau, anterior, foarte bine pregătite.

Opera sa științifică este greu să fie prezentată în câteva pagini. El este considerat un creator de drumuri în *Geometria diferențială, proiectivă și afină*. În orice curs aprofundat de geometrie sunt nominalizate *suprafețele Țițeica, curbele și rețelele Țițeica*. Cele două volume publicate la Paris "*Géométrie différentielle projective des réseaux*" (1923) și "*Introduction à la géométrie différentielle des courbes*" (1931) se bucură și astăzi de autoritate în întreaga lume.

După înființarea Gazetei Matematice, la 15 sept. 1895, imediat, la 1 noiembrie 1895 aderă cu tot sufletul la această publicație pentru tineret. Publică în această revistă note matematice articole, propune 121 de probleme, compune probleme pentru concursurile Gazetei Matematice, face chiar și corecturi în redacție, publică recenzii ș.a. Chiar dacă preocupările sale erau asupra unor domenii de înaltă specialitate, compune probleme utile elevilor de gimnaziu sau liceu, așa cum s-a întâmplat cu *«problema monedei de 5 lei»*, o bijuterie de problemă la predarea capitolului «Cerc», care trei sferturi de veac a fost în manualele școlare, iar în multe din manualele actuale lipsește. *«Problema monedei de 5 lei»*, găsită întâmplător de Țițeica desenând cercuri cu o monedă, a fost dată la Concursul Gazetei Matematice din 1908, an în care Gheorghe Țițeica a participat la concurs, la Galați. Pe atunci exista obiceiul ca marii matematicieni să participe la concursurile județene și să selecteze elevii foarte talentați, să publice aprecierile lor asupra soluțiilor date de elevi. Începând din 1905 și până la sfârșitul vieții a colaborat la revista «Natura», unde, cu un talent literar nebănuț, scrie articole care să atragă tineretul spre știință. În această revistă, pe coperta căreia scrie: *«Apare sub îngrijirea profesorilor Gheorghe Țițeica, Octav Onicescu și G.G. Longinescu»*, a publicat 121 de articole pentru popularizarea științei, cu conținut moral sau chiar gospodăresc. Iată câteva titluri: *"Matematica și arta"*, *"Probleme vestite de matematică"*, *"Viața lui Arhimed"*. Iată cum încheia, în această revistă, un articol despre o suprafață maximă cu perimetrul minim, care, după cum știm, este cercul: *"Prin urmare și geometria ne spune că suntem datori să apărăm actualele granițe, ca fiind cele mai favorabile Patriei noastre. Și știu, și sunt convins că le veți apăra"*. Din păcate, nu mai avem granițele din 1931.

Prețuirea și respectul de care s-a bucurat Gheorghe Țițeica în timpul vieții sale sunt redată în cuvintele spuse de un fost elev la moartea sa și reproduse de Ion Ionescu în prefața cărții de *geometrie analitică* apărută la scurt timp după decesul său (sfârșitul lui februarie 1939). **"În fața misterului morții, viața este o clipă solemnă. Aduceți la această clipă solemnă o inimă nobilă și un suflet mare. Atunci, între cei care zac în pământ și noi, va fi o legătură trainică: ceea ce ei au înfăptuit noi avem de desăvârșit."**

DE CEGEOMETRICE ?

Prof. dr. Miron Oprea, Ploiesti

Nu de puține ori, în lunga mea activitate didactică, mi-am pus întrebarea: „De ce șirul $a; aq; aq^2; \dots; aq^{n-1}; \dots$ se numește „*progresie geometrică*” sau seria: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ se numește „*serie geometrică*”? Explicația că oricare termen (începând cu al doilea) este *medie geometrică* între termenul anterior și cel posterior, niciodată nu m-a satisfăcut pe deplin și am fost convins că trebuie să existe neapărat o explicație *pur geometrică* și, în acest sens, am cercetat mai multe lucrări de *Istorie și Educație matematică*, mai ales, din școlile de cercetare matematică cu rezultate remarcabile, cum sunt: franceză, engleză, americană, germană și rusă. Acum aproape zece ani, aflându-mă în USA, am avut bucuria să vizitez celebra Universitate din Chicago (unde a predat distinsul savant român Mircea Eliade cursuri de *Istoria religiilor*) în biblioteca căreia am găsit faimosul *International Journal of Mathematics in Science and Technology* (vol. 8, nr. 1 din ianuarie 1977) în care am aflat articolul „*Geometric Construction of the Geometric Series*” al cărui autor este ilustrul profesor american de *Istoria matematicii*, ELI MAOR și care mi-a lămurit enigma.

În cele ce urmează, încerc, *iubite cititor*, să-ți lămuresc și ție această enigmă. Vom considera $|q| < 1$ când seria geometrică este convergentă, ceea ce înseamnă că există $\varphi \in (0, \pi)$, astfel încât $q = \cos \varphi$ și vom distinge două cazuri:

Cazul: $[0 < q < 1] \Leftrightarrow [0^\circ < \varphi < 90^\circ]$ (Fig.1). Construcțiile ce urmează se fac numai cu rigla și compasul.

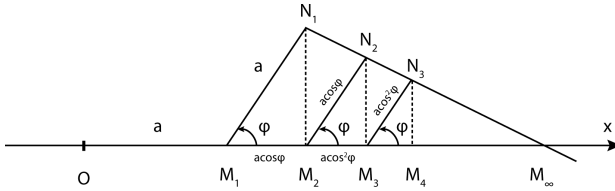


Fig. 1

Pe Ox , măsurăm $OM_1 = a$ unități; prin M_1 ducem o dreaptă care formează cu Ox , unghiul φ , pe care măsurăm $M_1N_1 = a$ unități. Din N_1 coborâm perpendiculara N_1M_2 pe Ox , deci $M_1M_2 = a \cos \varphi$, apoi ducem prin

M_2 o dreaptă care formează cu Ox , unghiul φ pe care măsurăm $M_2N_2 = M_1M_2 = a \cos \varphi$. Deci $M_2M_3 = a \cos^2 \varphi$ și așa mai departe.

Punctele $N_1; N_2; N_3; \dots$ formează o dreaptă care taie axa Ox în M_∞ , astfel încât:

$$OM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots = a + a \cos \varphi + a \cos^2 \varphi + a \cos^3 \varphi + \dots = OM_\infty = S = \frac{a}{1 - q}$$

Cazul: $[-1 < q < 0] \Leftrightarrow [90^\circ < \varphi < 180^\circ]$

Fie $OM_1 = a$ unități (Fig.2); prin M_1 ducem o dreaptă care formează cu sensul pozitiv al axei Ox unghiul obtuz φ și pe care măsurăm $M_1N_1 = a$ unități; din N_1 coborâm perpendiculara N_1M_2 pe Ox , deci

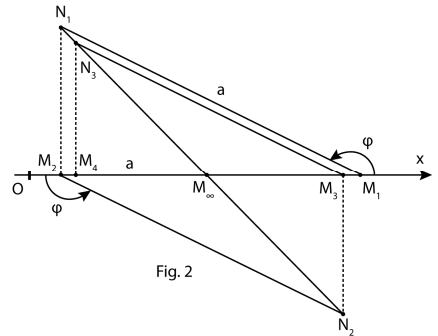


Fig. 2

$M_1M_2 = a \cos \varphi$; apoi ducem prin M_2 o dreaptă care formează cu sensul pozitiv al axei Ox , unghiul φ (deoarece M_1M_2 este îndreptat spre sensul negativ al axei Ox , dreapta pe care o construim va fi situată în semiplanul inferior al axei Ox).

Pe această dreaptă construim $M_2N_2 = M_1M_2 = a \cos \varphi$ și așa mai departe.

Punctele N_1, N_2, N_3, \dots sunt coliniare (rezultă din asemănarea triunghiurilor dreptunghice

$M_1M_2N_1, M_2M_3N_2, \dots$) și formează o dreaptă care taie pe Ox în M_∞ , astfel încât $OM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots = a + a \cos \varphi + a \cos^2 \varphi + \dots = OM_\infty = \frac{S}{1 - q}$. Când $q \rightarrow 0$, atunci dreapta

$N_1N_2N_3, \dots$ devine paralelă cu Ox și $OM_\infty = \infty$ (deci seria este divergentă) iar dacă: $[q = -1] \Leftrightarrow [\varphi = 180^\circ]$, atunci toate punctele $N_{2n+1} \equiv 0$, pe când punctele $N_{2n} \equiv M_1$ și dreapta N_1, N_2, N_3, \dots coincide cu Ox și se intersectează într-o infinitate de puncte.

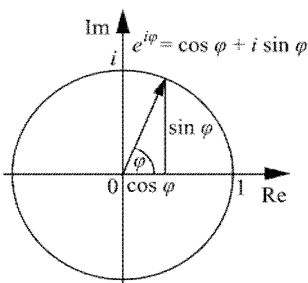
Concluzie:

Din cele de mai sus a rezultat că seria $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ are o interesantă și pură interpretare geometrică, fapt ce ne îndreptățește a o numi *serie geometrică* (sumă infinită de termeni în *progresie geometrică*).

CEA MAI “FRUMOASĂ” FORMULĂ DIN MATEMATICĂ

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Astfel este socotită faimoasa **identitate a lui Euler**, $e^{i\pi} + 1 = 0$, descoperită de genialul matematician elvețian **Leonhard Euler** în anul 1740. *Identitatea lui Euler* este o simplă consecință a nu mai puțin celebrei **formule a lui Euler**: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, atunci când se face înlocuirea argumentului φ prin π



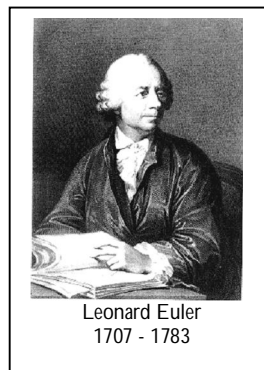
Formula lui Euler a fost descoperită în anul 1740 și inserată în celebra sa lucrare [4] – comparată de unii istorici ai matematicii cu “*Elementele*” lui *Euclid*, carte care însă a văzut lumina tiparului abia în anul 1748 (v.[3], [6]). De fapt – cum s-a dovedit ulterior (v. [8]), a fost vorba, mai degrabă, de o redescoperire a acestei relații.

Forme echivalente ei, dar ceva mai obscure, au fost obținute, la începutul veacului al XVIII și de către alți matematicieni ai vremii: englezul *Roger Cotes*, francezul *Abraham DeMoivre*, elvețianul *Johann Bernoulli* și chiar de însuși marele *Euler* - în două rânduri.

Identitatea lui Euler reunește într-o exprimare lapidară (și – să recunoaștem, și într-o formă cât se poate de surprinzătoare !) cele mai importante și cele mai utilizate cinci constante din matematica modernă : **0**, **1**, **i**, π și **e**

Semnificațiile acestor numere sunt binecunoscute :

- 0** – este elementul neutru față de operația de adunare ,
- 1** – este elementul neutru față de operația de înmulțire ,
- i** – este unitatea imaginară ,
- π – este raportul dintre lungimea și diametrul unui cerc ,
- e** – este *numărul lui Euler* – deopotrivă bază a logaritmilor naturali și limită a șirurilor (- introduse chiar de *Euler*), $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, respectiv



Leonard Euler
1707 - 1783

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, ambele binecunoscute în *Analiza matematică*.

De asemenea, în *identitatea lui Euler* apar câte o singură dată operațiile matematice fundamentale : adunarea, înmulțirea și ridicarea la putere (exponențierea).

Și toate aceste opt noțiuni matematice sunt îngemănate – în mod unic - sub semnul relației de egalitate ! Să remarcăm că prin natura elementelor componente, formula reușește să adune laolaltă noțiuni aparținând la diferite discipline matematice : *aritmetica și teoria numerelor, algebra, geometrie și trigonometrie, analiza reală și complexă* etc. (v.[3]-[10]).

De asemenea surprinde plăcut coexistența entităților *reale* (**0**, **1**, π , **e**) cu entitatea *complexă* **i** – pe de o parte, precum și a mărimilor *algebrice* (**0**, **1**, **i**) cu cele *transcendente* (π și **e**) – pe de altă parte.

Frumusețea identității lui Euler este sporită și de starea “de mister” în care este învăluită această formulă, iar misterul ei întrece bineînțeles misterul - cunoscut în lumea matematicienilor – al unora din constantele implicate (în pofida unor manifestări, interpretări sau aplicări din/în “lumea reală” ale acestor constante). Tocmai această îngemănare dintre *frumos și mister* au făcut din această formulă una din cele mai “populare” și mai apreciate formule din întreaga matematică. Pentru că, oricât ar părea de curios - și pentru creațiile matematice se întocmesc diferite clasamente ! Și trebuie spus că identitatea lui Euler se află mai întotdeauna pe podium. Poate cea mai relevantă clasificare a fost făcută de revista *Mathematics Intelligencer*, o revistă susținută de binecunoscutul trust de publicații de matematică (cărți și reviste) Springer-Verlag. Astfel în această revistă , în 1988 este

lansată lumii academice, cunoscătorilor și consumatorilor de matematică - o anchetă inedită pentru stabilirea „*celel mai frumoase teoreme din matematică*”.

Rezultatul votării, exprimat în acordarea de note de la 0 la 10, pentru o lista de 24 de rezultate celebre din matematica - și publicat în numărul din vara 1990, plasează *identitatea lui Euler*, pe primul loc, cu media de 7,70. Pentru comparație, să amintim că: pe locul doi s-a plasat demonstrația lui Euclid despre existența unei infinități de numere prime - cu media 7,50 ; pe locul trei - cu media 6,70 , demonstrația privind iraționalitatea lui $\sqrt{2}$; pe locul patru rezultatul privind transcendența lui π – cu media 6,50 !

De asemenea *identitatea lui Euler* apare pe locul doi în topul „*celor mai importante formule*” științifice, inițiat de editorii revistei *Physics World* [1] - după ecuația lui *Maxwell* (pentru câmpul electromagnetic). Repondenții la ancheta revistei s-au întrecut în calificative : “*cea mai profundă propoziție matematică scrisă vreodată*”, “*cindată și sublimă*”, “*șocantă*”, “*picantă*”, “*încărcată cu o frumusețe cosmică*” sau exclamări de genul - “*ce poate fi mai misterios decât un număr imaginar care interacționează cu un număr real pentru a se anula (!?)*”. Iată că nu numai matematicienii, ci și fizicienii apreciază splendoarea formulei lui Euler. De altfel, renumitul fizician *Richard Feynman*, laureat al premiului Nobel pentru fizică, dar și un talentat matematician, numește această formulă : “*bijuteria noastră*” și “*cea mai remarcabilă formulă din matematică !*” [6], [7].

Entuziasmul matematicienilor – în legatura cu această formulă - este chiar mai mare. Astfel într-o lucrare de aproape 400 de pagini și dedicată aproape în exclusivitate acestei formule[7], autorul ei - *Paul Nahin* o numește “*standardul de aur pentru frumusețea matematicii*” sau “*cea mai faimoasă formulă din toată matematică*”. Sau iată cum o înfățișează – prin asociere cu alte produse artistice propriu-zise - cunoscutul matematician *Keith Devlin* de la Universitatea Stanford : “*Ca un sonet shakespearean care captează filonul pur al dragostei , sau ca o pictură care dezvăluie frumusețea umană dincolo de aparență , identitatea lui Euler atinge adevărată adâncime a existenței*” !

Să mai adăugăm că și pentru matematicieni se fac topuri și aici trebuie să spunem că de fiecare dată *Leonhard Euler* este în Top 5 (alături de nume precum cele ale lui *Arhimede*, *Newton* sau *Gauss*).

În ceea ce privește semnificația reală a *identității lui Euler*, trebuie spus că lucrurile sunt departe de a fi total lămurite și explicate. Pentru a exemplifica și prelungi starea “*de perplexitate*” ce ne este indusă de această formulă, vom expune și două forme echivalente ei, la fel de stranii, care – fapt remarcabil - furnizează evaluări pentru puteri ale lui *i*. Pentru aceasta, scriind identitatea lui

Euler sub forma $e^{i\pi} = -1$, prin ridicarea la puterea $\frac{1}{2}$, obținem, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ (*)

Mai departe , prin ridicarea la puterea *i* și folosind $i^2 = -1$, obținem $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$.

Cu ajutorul unui calculator, se obține chiar următoarea evaluare numerică – cu 10 zecimale exacte, $i^i = \frac{1}{e^{\pi/2}} = 0,2078795763 \dots$

De asemenea, din (*), prin ridicare la puterea $1/i$, obținem, $e^{\frac{\pi}{2}} = i^{1/i} = \sqrt[i]{i}$ care se

poate calcula cu ajutorul unui calculator. Trebuie spus că aceste valori obținute pentru i^i și $\sqrt[i]{i}$ sunt doar unele dintre multele (chiar infinit de multe !) valori reale cu aceiași proprietate, deoarece în mulțimea numerelor complexe - *exponențierea nu este unică !* De exemplu pentru i^i toate rădăcinile reale sunt $i^i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$, unde *k* este un număr întreg .

Despre formula $\sqrt[i]{i} = e^{\frac{\pi}{2}}$ – matematicianul american *Benjamin Pierce* (1808 – 1880) le spunea studenților săi de la universitatea Harvard: ” *Domnilor, ceea ce este cu siguranță adevărat, este că este absolut paradoxală, n-o putem înțelege și nu știm ce înseamnă; dar am demonstrat-o, prin urmare știm că trebuie să fie adevărată!* ” [3], [7]. Desigur că această caracterizare, plină de umor, dar vădind și modestie și obiectivitate științifică - se poate aplica și pentru echivalența ei **identitatea lui Euler !.**

Bibliografie

- 1] Crease, Robert P: [The greatest equations ever](http://physicsworld.com/cws/article/print/20407) PhysicsWeb, October 6 , 2004, *On line*. <http://physicsworld.com/cws/article/print/20407>;
- [2] Devlin Keith: The language of mathematics: making the invisible visible, W. H. Freeman and Company , New York ,1998, 2000 .
- [3] Dunham William: Euler : The Master of Us All , Mathematical Association of America, 1999.
- 4] Euler, Leonhard: Introductio in analysin infinitorum, Bosquet, Lausanne, 1748. Available at www.EulerSociety.org English translation by John Blanton, Springer, New York, 1988 and 1990.
- [5] Le Lionnais François (avec la collaboration de Jean Brette): Les nombres remarquables , Hermann , Paris 1983 .
- [6] Maor Eli: e : the story of a number , Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994 .
- [7] Nahin, Paul J: Dr. Euler's Fabulous Formula : Cures Many Mathematical Ills, Princeton University Press, 2006.
- [8] Sandifer, C. Edward: *e, π and i: Why is "Euler" in the Euler identity?*, in [Euler's Greatest Hits](#), MAA Online, February 2007.
- [9] Sandifer, C. Edward: *The Early Mathematics of Leonhard Euler*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.
- [10] Yeo Adrian: *The Pleasures of Pi, e and Other Interesting Numbers* ", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

INEGALITĂȚI ÎN PARALELIPEDUL DREPTUNGHI

Prof. Ștefan Smarandache, București

Începem scurta noastră notă, prin enumerarea unor rezultate clasice notate $R_i; i = \overline{1,7}$ ce vor fi folosite pe parcursul ei. Astfel, dacă m, n, p sunt numere reale pozitive, iar $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$R_1: \frac{m+n}{2} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}} \Leftrightarrow (m+n)^2 \leq 2(m^2+n^2) \Leftrightarrow m+n \leq \sqrt{2(m^2+n^2)}$$

$$R_2: \frac{m+n+p}{3} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2+p^2}{3}} \Leftrightarrow (m+n+p)^2 \leq 3(m^2+n^2+p^2) \Leftrightarrow m+n+p \leq \sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}$$

$$R_3: \sqrt[3]{mnp} \leq \frac{m+n+p}{3}$$

$$R_4: (m+n+p) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{m+n+p}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}}$$

$$R_5: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} \geq \frac{(x+y+z)^2}{m+n+p}$$

$$R_6: x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$R_7: (x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$$

În continuare vom enunța și vom demonstra câteva inegalități (notate $I_k; k = \overline{1,9}$) care au

loc în orice paralelipiped dreptunghic de dimensiuni a, b, c , diagonală $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, arie totală $S = 2(ab + ac + bc)$ și volum $V = abc$:

$$I_1: \sqrt{a^4 + b^4} + \sqrt{b^4 + c^4} + \sqrt{c^4 + a^4} \geq \frac{S\sqrt{2}}{2}$$

$$I_2: \sqrt{a^6 + b^6} + \sqrt{b^6 + c^6} + \sqrt{c^6 + a^6} \geq 3\sqrt{2} \cdot V$$

$$I_3: a + b + c \leq \frac{9V}{d^2}$$

$$I_4: \frac{d^3}{V} \geq 3\sqrt{3}$$

$$I_5: \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq \frac{S^2}{12V}$$

$$I_6: \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{3S}{2d^2}$$

$$I_7: \frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{S}{2d^2}$$

$$I_8: \frac{a}{b+c+d\sqrt{3}} + \frac{b}{c+a+d\sqrt{3}} + \frac{c}{a+b+d\sqrt{3}} \geq \frac{3S}{10d^2}$$

$$I_9: \frac{1}{a^5(b+c)} + \frac{1}{b^5(c+a)} + \frac{1}{c^5(a+b)} \geq \frac{81}{2d^6}$$

SOLUȚII:

$$I_1: \sqrt{a^4 + b^4} + \sqrt{b^4 + c^4} + \sqrt{c^4 + a^4} \stackrel{(R_1)}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{2} [(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)] = \sqrt{2}(a^2 + b^2 + c^2) \stackrel{(R_6)}{\geq}$$

$$\geq \sqrt{2}(ab + ac + bc) = \frac{\sqrt{2}S}{2}$$

$$I_2: \sqrt{a^6 + b^6} + \sqrt{b^6 + c^6} + \sqrt{c^6 + a^6} \stackrel{(R_1)}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{2} [(a^3 + b^3) + (b^3 + c^3) + (c^3 + a^3)] = \sqrt{2} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \stackrel{(R_3)}{\geq}$$

$$\geq \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = 3\sqrt{2}abc = 3\sqrt{2} \cdot V$$

$$I_3: (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \stackrel{(R_3)}{\leq} 3\sqrt{abc} \cdot 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} = 9\sqrt{a^3 b^3 c^3} = 9abc \Rightarrow (a+b+c) \cdot d^2 \leq 9V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c \leq \frac{9V}{d^2}$$

$$I_4: d^6 = (a^2 + b^2 + c^2)^3 \stackrel{(R_3)}{\leq} \left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3 = 27a^2b^2c^2 = 27V^2 \Rightarrow \frac{d^6}{V^2} \geq 27 \Rightarrow \frac{d^3}{V} \geq 3\sqrt{3}$$

$$I_5: \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = \frac{(ab)^2}{abc} + \frac{(bc)^2}{abc} + \frac{(ac)^2}{abc} \stackrel{(R_5)}{\geq} \frac{(ab+bc+ac)^2}{3abc} = \left(\frac{S}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{12V}$$

$$I_6: \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \stackrel{(R_5)}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \stackrel{(R_7)}{\geq} \frac{3(ab+bc+ac)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot S}{d^2} = \frac{3S}{2d^2}$$

$$I_7: E = \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \stackrel{(R_5)}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)} \stackrel{(R_7)}{\geq} \frac{3(ab+bc+ac)}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot S}{2d^2+(ab+bc+ac)}$$

Dar: $ab+bc+ac \stackrel{(R_6)}{\leq} a^2+b^2+c^2 = d^2 \Rightarrow 2d^2+(ab+bc+ac) \leq 3d^2 \Rightarrow \frac{1}{2d^2+(ab+bc+ac)} \geq \frac{1}{3d^2}$

Deci: $E \geq \frac{\frac{3}{2} \cdot S}{3d^2} = \frac{S}{2d^2}$

$$I_8: F = \frac{a}{b+c+d\sqrt{3}} + \frac{b}{c+a+d\sqrt{3}} + \frac{c}{a+b+d\sqrt{3}} = \frac{a^2}{ab+ac+ad\sqrt{3}} + \frac{b^2}{bc+ab+bd\sqrt{3}} + \frac{c^2}{ac+bc+cd\sqrt{3}} \stackrel{(R_5)}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)+d\sqrt{3}(a+b+c)}$$

Și cum: $ab+bc+ac \stackrel{(R_6)}{\leq} a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 2(ab+bc+ac) \leq 2d^2$

$$(a+b+c)^2 \stackrel{(R_2)}{\leq} 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a+b+c \leq 3d \Rightarrow d\sqrt{3}(a+b+c) \leq 3d^2$$

Adunând ultimele două relații, membru cu membru, obținem :

$$2(ab+bc+ac)+d\sqrt{3}(a+b+c) \leq 5d^2 \Rightarrow \frac{1}{2(ab+bc+ac)+d\sqrt{3}(a+b+c)} \geq \frac{1}{5d^2}$$

Dar : $(a+b+c)^2 \stackrel{(R_7)}{\geq} 3(ab+bc+ac) = \frac{3}{2} \cdot S$

În acest fel, din ultimele două inegalități, obținem: $F \geq \frac{\frac{3}{2} \cdot S}{5d^2} = \frac{3S}{10d^2}$

$$I_9: G = \frac{1}{a^5(b+c)} + \frac{1}{b^5(c+a)} + \frac{1}{c^5(a+b)} = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \quad (R_5) \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{2(ab+bc+ac)} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (R_4) \geq \frac{9^2}{2d^4 \cdot (ab+bc+ac)}$$

Dar: $ab+bc+ac \stackrel{(R_6)}{\leq} a^2+b^2+c^2 = d^2 \Rightarrow \frac{1}{ab+bc+ac} \geq \frac{1}{d^2}$ Deci: $G \geq \frac{81}{2d^6}$

Se observă că cele 9 inegalități devin egalități atunci când $a=b=c$, adică în cazul cubului.

ASCUȚITORI ALE MINȚII

1. Nuferii care cresc pe suprafața unui lac își dublează aria în fiecare zi, astfel încât acoperă în 30 de zile întreaga suprafață a lacului. În cât timp vor acoperi jumătate din suprafața lacului?
2. Un ogar urmărește o vulpe care este distanțată la 60 de sărituri înaintea lui. Vulpea, mai iute de picior, face 9 sărituri în timp ce ogarul face 6. În schimb 3 sărituri ale ogarului fac cât 7 ale vulpii. Peste câte sărituri ale ogarului va fi ajunsă vulpea?
3. Ce număr între 2000 și 3000 este divizibil cu orice număr x astfel încât $1 \leq x \leq 10$?
4. Un tipograf are nevoie de 2989 cifre pentru a numerota paginile unei cărți. Câte pagini are cartea?
5. Care este data nașterii strănepotului meu dacă s-a născut într-un an par, în 30 ale lunii, într-o zi de joi și a împlinit 5 ani tot într-o joi ?
6. Un vapor parcurge pe Dunăre în aval distanța „a” în 5 ore, iar în amonte parcurge aceeași distanță în 6 ore. În cât timp va parcurge aceeași distanță „a” o plută purtată doar de viteza apei?
7. Într-o familie, un băiat afirmă că el are un număr egal de frați și surori, iar o fată afirmă la rândul ei că are de două ori mai mulți frați decât surori. Câți băieți și câte fete sunt în acea familie?
8. Un tată are 41 ani și patru copii de 8, 6, 4 și 2 ani. După câți ani tatăl va avea vârsta cât suma vârstelor copiilor ?
9. Să se reconstituie înmulțirea:
$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \\ 4 \quad \times \\ \hline dcba \end{array}$$
10. Să se afle cel mai mic număr natural care împărțit la 10, 9, 8, ..., 2 să dea resturile, respectiv 9, 8, 7, ..., 1.

Rubrică realizată de M. Oprea