PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU *

Probleme selectate de Catedra de Matematică a C.N. „Nicolae Grigorescu" Câmpina

Clasa a IX-a

1. Dacă a, b, c $\in (0;\infty)$ asfel încât a+ b+ c = 2, atunci

$$\frac{7}{9}\left(\text{ab+ac+bc}\right)-\text{abc}\le\frac{20}{27}.$$

Iuliana Trașcă ,Mărgineni-Slobozia, jud. Olt

2. Sa se rezolve in *R* ecuatia : $[4x]-[x]=x^2+2x+\frac{3}{4}+\left[\frac{4x+1}{2}\right]$,unde $[x]$ este partea intreaga a numarului real x .

Claudiu Militaru,Ploiesti

3. Fie triunghiul ABC si punctele $D,E\in(AB)$, $F,G\in(AC)$ astfel incat $AD=BE<AB/2$, $AF=CG<AC/2$. Fie $CD\cap BF=\{P\}$ si $CE\cap BG=\{Q\}$. Sa se demonstreze ca A,P,Q sunt coliniare daca si numai daca $\frac{DE}{AB}=\frac{FG}{AC}$.

Claudiu Militaru,Ploiesti

4. Sa se determine functiile f : $R\to R$,care indeplinesc conditia : f(x)f(y)=f(x-y) , $\forall\ x,y\in R$.

(***)

5. Rezolvati in R ecuatia :

$$\left[\frac{\left[\sqrt{x}\right]+2}{n}\right]+\left[\frac{\left[\sqrt{x}\right]+3}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{\left[\sqrt{x}\right]+n+1}{n}\right]=\left[\sqrt{x}\right]^2,\ n\in N^*.$$

Mihaiela Doinaru,Sinaia

6. Sa se determine functia $f:R\to R,$ cu proprietatea ca f(x)+2009f([x])+2009f({x})=2010{x} ^{2} ,unde {x}este partea fractionara a numarului real x si [x] este partea intreaga a numarului real x.

Roxana Lica,Ploiesti

7. Fie A o multime cu n elemente , n>2 si B o multime cu 2 elemente.Cate perechi de functii (f;g) definite pe A cu valori in B au proprietatea ca $G_f\cup G_g=$ AxB. (***)

* **Se primesc soluții pana la 10 iunie 2010.**

Clasa a X-a

1. Fie funcția $f:\Re\to\Re$ care satisface relația:
$$2f(x)+f(1-x)=\begin{cases}x+1, & daca\ x\in Q\\ -x+2, & daca\ x\in Q\end{cases}$$
a) Să se determine funcția f ;b) Să se calculeze $f\circ f$;c) Să se demonstreze că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

Constantin Stan,Campina

2. Să se discute şi să se rezolve după valorile parametrului $a\in(0,+\infty)-\{1\}$ inecuația: $a^{|\log_a x|}\le\frac{1}{x}$.

Constantin Stan,Campina

3. Să se rezolve ecuatia în mulțimea numerelor reale :
$\sqrt{9x^2+y}+\sqrt{y+2}=\sqrt{6x-y^2}$.

Iuliana Trașcă, Mărgineni-Slobozia, jud. Olt

4. Sa se rezolve ecuatia : $x+\sqrt{2^x(x+1)}=\sqrt{x+1}$.

Gabriel Necula,Plopeni

5. Sa se rezolve ecuatia : $2^{\lg x}+\frac{1}{x\cdot 2^{\lg x}}=\frac{3x-1}{x^2}$, x > 0.

Claudiu Militaru,Ploiesti

6. Rezolvati in R ecuatia : $2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=\cos 2x$.

(***)

7. Fie $z_1,z_2\in C$ si $\alpha\in[0;1]$.Aratati ca : $|z_1+z_2|\le|\alpha z_1+(1-\alpha)z_2|$ $+|(1-\alpha)z_1+\alpha z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

(***)

8. Rezolvati in (3;∞) ecuatia:
$9^{x-3}\log_3^2(x-3)-27(1+3^{25})3^{x-3}\log_3(x-3)+3^{31}=0.$

Sanziana Dumitran, Campina

9. Sa se determine numarul complex z=r(cost+isint),r >0,t$\in[0;\pi/2]$,daca :
$(r^2+3)[\log_{2010}(4r^2-1)]=4$ si $2^{2\sin^2 t-1}=\cos t+\frac{1}{\cos t}$.

Roxana Lica,Ploiesti

10 Aratati ca , daca trei numere complexe au proprietatea a+b+c=abc+2, atunci cel putin unul din ele are partea reala mai mica sau egala decat 1. (***)

Clasa a XI-a

1. Calculati $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)...(n+2010)}{n^{2010}}\right]^{n+2010}$.

Sanziana Dumitran,Campina

2. Fie sirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ si $10^{\frac{\lg 3^{(n+1)!x_{n+1}-n}}{(n+1)!}} = 3^{x_n}$, oricare ar fi n numar natural, n≥ 1. Studiati convergenta sirului $(x_n)_n$ si in caz de convergenta ,calculati limita sa.

Mihaiela Doinaru,Sinaia

3. Sa se calculeze, fara a folosi regula lui l'Hospital (n$\in N^*$) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^n\cdot n!-\cos x\cdot\ln(e^2+x)\cdot\cos 3x\cdot\ln(e^4+x)\cdot\ldots\cdot\cos(2n-1)x\cdot\ln(e^{2n}+x)}{x}.$$

Gabriel Necula,Plopeni

4. Să se determine A^n, unde $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $n\in N*$.

Cătălin Năchilă, UPG Ploieşti

5. Fie A$\in$M$_2$(**R**) astfel incat trA$\neq$0 si det A$\neq$0.Sa se determine toate matricele X$\in$M$_2$(**R**) care verifica egalitatea : A(AX + XA) + (AX + XA)A =
=A(AX^2 + X^{2}A) + (A X^2 + X^{2}A)A .

Gabriel Necula,Plopeni

6. Fie multimea $M = \{a, a+1, a+2, ..., a+15\}$, $a\in Z$ si G – multimea matricelor patratice de ordin 4 cu elemente distincte din M .

a) Aratati ca orice matrice din G are cel putin trei minori de ordin 2 divizibili cu 3 ;

b)Determinati multimea $K = \{r\in N \mid \exists A\in G \text{ astfel incat } rangA = r\}$.

Claudiu Militaru,Ploiesti

8. Stiind ca a+b+c=0, calculati suma $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a\sqrt{k+7}+b\sqrt{k+6}+c\sqrt{k+5})$.

Daca a=c , determinati $\lim_{n\to\infty}S_n$. *Sanziana Dumitran,Campina*

9. Să se rezolve, în mulţimea $M_2(\mathbb{R})$, ecuaţia: $X^{2010}=\begin{pmatrix}4&6\\8&12\end{pmatrix}$.

Florin Antohe , Galaţi

Clasa a XII-a

1. Calculati $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$,stiind ca $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^{2n+1}x}{\sqrt{1-\sin x}}, x\in[0;\dfrac{\pi}{2}) \\ 0, x=\pi/2\end{cases}$ si n$\in N^*$.

Sanziana Dumitran,Campina

2. Calculati $\int \dfrac{dx}{2010\cdot x^{2010}+x^{6028}}$, x>0.

Claudiu Militaru,Ploiesti

3. Demonstrati ca nu exista morfisme intre inelele (Z[i] ;+ ; ·) si (Z[$\sqrt{2}$] ; + ; ·).

(***)

4. Sa se determine o primitiva a functiei continue $f:R\to R$,stiind ca f(0)= =2010 si exista $t\in(1;\infty)$ astfel incat f(x)-f(x/t)=28 x^3-15x^2+2x.

Sanziana Dumitran.Campina

5. Sa se calculeze $\int \dfrac{2\sqrt{2}x[\cos(x-\pi/4)+2\sin(\pi/4-x)]}{x^4+\sin 2x-1}dx$, $x>2$.

Gabriela Leu,Sinaia

6. Fie (K;+; ·) un corp cu 81 de elemente.Sa se determine un automorfism al corpului K.

(***)

7. Demonstrati ca,daca functia $f:[0;\dfrac{\pi}{n}]\to R$, $n\in N^*$, este o functie para, atunci: $\int_0^{\frac{\pi}{n}} xf(\cos nx)dx=\dfrac{\pi}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\cos nx)dx$.

Sanziana Dumitran,Campina

8. Se consideră $I_n=\int \dfrac{2\cdot x^3+9\cdot x^2+17\cdot x+12}{\left(x^2+3\cdot x+3\right)^n}\,dx,\quad x\in\mathbb{R},\ n\geq 1, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1 şi I_2 .

b) Să se calculeze I_n , $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

Romeo Zamfir, Galați

9. Aratati ca polinomul P(x)=$1+\dfrac{1}{1!}X+\dfrac{1}{2!}X^2+...+\dfrac{1}{n!}X^n$, n$\in N^*$ nu are radacini multiple.

Sanziana Dumitran,Campina