REZOLVAREA PROBLEMELOR DATE LA OLIMPIADA LOCALĂ, PRAHOVA, 2009

RADU SIMION, PLOIEŞTI

Clasa a IX – a

1. a) Demonstraţi că, dacă produsul a două numere pozitive este constant, atunci suma lor este minimă când numerele sunt egale.
b) Formaţi o progresie aritmetică cu n termeni pozitivi ştiind că produsul dintre primul termen şi raţie este a, iar suma celor n termeni ai progresiei este minimă.

***

Soluţie: a) $x, y > 0$ şi $x \cdot y = p \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} = \sqrt{p} + \sqrt{p}$, deci suma este minimă când numerele sunt egale $x = y = \sqrt{p}$.

b) Progresia aritmetică $a_1, a_2, ..., a_n$ de raţie r are $a_1 \cdot r = a$ şi

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + r(n-1)] \geq \frac{n}{2} 2\sqrt{2a_1 r(n-1)} = n\sqrt{2a(n-1)}$ cu egalitate pentru $2a_1 = r(n-1)$ adică pentru $a_1 = \sqrt{\frac{a(n-1)}{2}}$ şi $r = \sqrt{\frac{2a}{n-1}}$.

2. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} a[a] + c\{c\} - [b]\{b\} = 0,16 \\ 4b[b] + 4a\{a\} - 4[c]\{c\} = 1 \\ c[c] + b\{b\} - [a]\{a\} = 0,49 \end{cases}$, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

Prof. Gabriel Necula, Plopeni

Soluţie: Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} a[a] + c\{c\} - [b]\{b\} = 0,16 \\ 4b[b] + 4a\{a\} - 4[c]\{c\} = 1 \\ c[c] + b\{b\} - [a]\{a\} = 0,49 \end{cases}$, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

Notăm $[a] = m, [b] = n, [c] = p, \{a\} = x, \{b\} = y, \{c\} = z$ şi sistemul devine:

$\begin{cases} (m+x)m + (p+z)z - ny = 0,16 \quad (1) \\ (n+y)n + (m+x)x - pz = 0,25 \quad (2) \\ (p+z)p + (n+y)y - mx = 0,49 \quad (3) \end{cases}$. Adunăm (1) şi (2): $n^2 + z^2 + (m+x)^2 = 0,41$, de unde $0 \leq n^2 \leq 0,41$ şi cum $n \in \mathbb{Z}$ rezultă $n = 0$. Adunăm (1) şi (3): $m^2 + y^2 + (p+z)^2 = 0,65$, de unde $0 \leq m^2 \leq 0,65$ şi cum $m \in \mathbb{Z}$ rezultă $m = 0$. Adunăm (2) şi (3): $p^2 + x^2 + (n+y)^2 = 0,74$, de unde $0 \leq p^2 \leq 0,74$ şi cum $p \in \mathbb{Z}$ rezultă $p = 0$.

Acum: $\begin{cases} z^2 + x^2 = 0,41 \\ y^2 + z^2 = 0,65 \\ x^2 + y^2 = 0,74 \end{cases}$. Adunăm şi obţinem

$x^2+y^2+z^2=0,90 \Rightarrow x^2=0,25;\ y^2=0,49;\ z^2=0,16$ şi cum

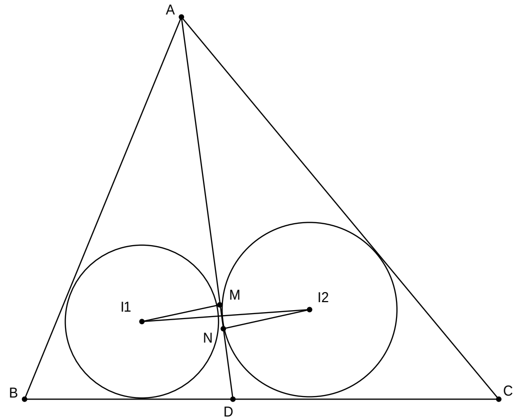
$x, y, z \in [0,1) \Rightarrow x=0,5;\ y=0,7;\ z=0,4$, iar $a=0,5;\ b=0,7;\ c=0,4$.

3. Fie triunghiul ABC şi punctele D - piciorul bisectoarei din A, I_1, I_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv ACD. Se ştie că $BC=12,\ AD=8,\ I_1I_2 \parallel BC$.

a) Demonstraţi că $AB=AC$.

b) Dacă $\overrightarrow{AI_1}=\vec{u},\ \overrightarrow{AI_2}=\vec{v}$, exprimaşi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ în funcţie de $\vec{u}$ şi $\vec{v}$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti



Soluţie: a) Fie M şi N proiecţiile pe AD ale punctelor I_1, I_2. Cum $I_1I_2 \parallel BC \Rightarrow r_1=r_2$, razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv ACD.

Triunghiurile dreptunghice AMI_1 şi ANI_2 sunt congruente (c.u.) deci $M=N$, iar $I_1I_2 \perp AD \Rightarrow AD \perp BC \Leftarrow AB=AC$.

b) Considerăm A pol în plan şi notăm vectorul $\overrightarrow{AX}=X$. I_1, I_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv ACD, deci $I_1=\dfrac{8B+10D}{6+8+10}$, $I_1=\dfrac{13B+5C}{24}$ pentru că $D=\dfrac{B+C}{2}$. Analog

$I_2=\dfrac{5B+13C}{24}$. Din sistemul $\begin{cases}13B+5C=24I_1\\ 5B+13C=24I_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}=\dfrac{13I_1-5I_2}{6}=\dfrac{13\vec{u}-5\vec{v}}{6}\\ \overrightarrow{AC}=\dfrac{-5I_1+13I_2}{6}=\dfrac{-5\vec{u}+13\vec{v}}{6}\end{cases}$

4. În triunghiul ABC se consideră punctele D, E, F - mijloacele laturilor AB, BC, AC şi $M \in (BE),\ N \in (CE)$. Arătaţi că AE, DM, FN sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{BM}{ME}=\dfrac{CN}{NE}\neq 1$.

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti

Soluţie: $\dfrac{BM}{ME}=1 \Leftrightarrow DM \parallel AE \Leftrightarrow AE, DM, FN$ nu sunt concurente.

$\dfrac{BM}{ME}\neq 1 \Leftrightarrow DM \cap AE \overset{not}{=} \{T\} \neq \varnothing$. Notăm $\{P\}=TF \cap EC$ şi avem $\dfrac{BM}{ME}\dfrac{ET}{TA}\dfrac{AD}{DB}=1$,

$\dfrac{CP}{PE}\dfrac{ET}{TA}\dfrac{AF}{FC}=1$, deci $\dfrac{BM}{ME}=\dfrac{CP}{PE}\neq 1$, de unde $\dfrac{BM}{ME}=\dfrac{CN}{NE}\neq 1 \Leftrightarrow AE, DM, FN$ sunt concurente, pentru că $P = N \Leftrightarrow \frac{CP}{PE} = \frac{CN}{NE}$.

Clasa a X – a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x^{2009} - y^{2009} = \log_{2009} \frac{y}{x} \\ x^2 - xy + y^2 = 2009 \end{cases}$.

Prof. Coman Vasile, Vălenii de Munte

Soluţie: $x^{2009} - y^{2009} = \log_{2009} \frac{y}{x} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, unde

$f(t) = t^{2009} + \log_{2009} t,\ f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare (fiind sumă de funcţii strict crescătoare), deci injectivă. Atunci $x = y$ şi din $x^2 - xy + y^2 = 2009 \Rightarrow x = y = \sqrt{2009}$.

2. a) Fie $x, y, z, t \in (1, \infty)$ astfel încât $x^3 > yzt$. Să se demonstreze că

$$\lg^3 x > (\lg y)(\lg z)(\lg t).$$

b) Generalizaţi rezultatul de la a).

Prof. Petre Năchilă şi Cătălin Năchilă, Ploieşti

Soluţie:

a) $x > \sqrt[3]{yzt} \Rightarrow \lg x > \frac{\lg y + \lg z + \lg t}{3} \ge \sqrt[3]{(\lg y)(\lg z)(\lg t)} \Rightarrow \lg^3 x > (\lg y)(\lg z)(\lg t)$.

b) Generalizare: „Fie $x, a_1, ..., a_n \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^n > a_1...a_n$. Să se demonstreze că $\lg^n x > (\lg a_1)...(\lg a_n)$."

Ca mai sus, se foloseşte monotonia funcţiei lg şi inegalitatea mediilor.

3. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$ şi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = n \cdot 2^{mx} - m \cdot 2^{nx}$. Arătaţi că:

a) $f(x) \ge f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploieşti

Soluţie: a) Lemă: Dacă $a > 0, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a^{n+1} - 1}{n+1} \ge \frac{a^n - 1}{n}$ cu egalitate doar pentru $a = 1$.

Dem: $n(a^{n+1} - 1) \ge (n+1)(a^n - 1) \Leftrightarrow na^n(a-1) \ge a^n - 1$

$\Leftrightarrow (a-1)(na^n - a^{n-1} - ... - 1) \ge 0 \Leftrightarrow$

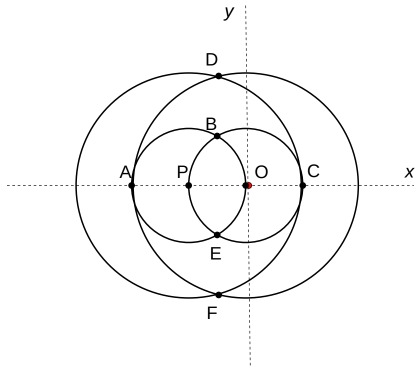
$(a-1)(a^n - a^{n-1} + a^n - a^{n-2} + ... + a^n - 1) \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \left[a^{n-1} + ...(a^{n-1} + ... + 1)\right] \ge 0$

adevărat.

Avem $f(x) \ge f(0), \forall x \in \mathbb{R} \overset{2^x = a > 0}{\Leftrightarrow} na^m - ma^n \ge n - m \Leftrightarrow \frac{a^m - 1}{m} \ge \frac{a^n - 1}{n}$ adevărată prin aplicarea Lemei pentru $n, n+1, ..., m-1$: $\frac{a^m - 1}{m} \ge \frac{a^{m-1} - 1}{m-1} \ge ... \ge \frac{a^n - 1}{n}$.

b) Fie $x > y \geq 0$,

$2^x = b, 2^y = c, b > c \geq 1, a = \frac{b}{c} > 1$.



Atunci

$f(x) > f(y) \Leftrightarrow nb^m - mb^n > nc^m - mc^n \Leftrightarrow$

$\frac{b^m - c^m}{m} > \frac{b^n - c^n}{n} \Leftrightarrow c^m \frac{a^m - 1}{m} > c^n \frac{a^n - 1}{n}$,

adevărat pentru că $c \geq 1$, $m > n$ şi aplicarea Lemei pentru $a > 1$ şi $n, n+1, ..., m-1$:

$\frac{a^m - 1}{m} > \frac{a^{m-1} - 1}{m-1} > ... > \frac{a^n - 1}{n}$. Deci *f* este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Analog *f* este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ luând

$0 \geq x > y$, $2^x = b, 2^y = c, b > c \geq 1, a = \frac{b}{c} > 1$

$f(x) < f(y) \Leftrightarrow nb^m - mb^n < nc^m - mc^n \Leftrightarrow \frac{b^m - c^m}{m} < \frac{b^n - c^n}{n} \Leftrightarrow c^m \frac{a^m - 1}{m} < c^n \frac{a^n - 1}{n}$,

adevărat pentru că $c \leq 1$, $m > n$ şi aplicarea Lemei pentru $a > 1$ şi $n, n+1, ..., m-1$:

$\frac{a^m - 1}{m} < \frac{a^{m-1} - 1}{m-1} < ... < \frac{a^n - 1}{n}$.

4. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $\left[\log_2 |z|\right] + \left[\log_2 |z+1|\right] = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

a) Determinaţi o soluţie a ecuaţiei.

b) Determinaţi valorile posibile pentru $\left[|z|\right]$.

c) Să se arate că $|\operatorname{Im} z| \leq \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Soluţie: a) $z = i$ verifică ecuaţia.

b) Notăm $\left[\log_2 |z|\right] = k \in \mathbb{Z}$ şi avem $2^k \leq |z| < 2^{k+1}, 2^{-k} \leq |z+1| < 2^{-k+1}$, de unde

$2^{-k} \leq |z+1| \leq |z| + 1 < 2^{k+1} + 1 \Rightarrow 2 \cdot 2^{2k} + 2^k - 1 > 0 \Rightarrow (2^k + 1)(2 \cdot 2^k - 1) > 0 \Rightarrow k > -1 \Rightarrow k \in \mathbb{N}$

şi $2^k \leq |z + 1 - 1| \leq |z+1| + 1 < 2^{-k+1} + 1 \Rightarrow 2^{2k} - 2^k - 2 < 0 \Rightarrow (2^k - 2)(2^k + 1) < 0 \Rightarrow k < 1$,

deci $k = 0$. Atunci ecuaţia este echivalentă cu $1 \leq |z| < 2, 1 \leq |z+1| < 2$, iar $\left[|z|\right] = 1$.

c) Din $1 \leq |z| < 2, 1 \leq |z+1| < 2$ rezultă că z se află în regiunea $ABCD \cup AECF$ unde cele patru cercuri din figură sunt de centru $O(0, 0)$ şi raze 1, 2, respectiv centru $P(-1, 0)$ şi raze 1, 2. Atunci $|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Im} z_D| = |\operatorname{Im} z_F| \leq \frac{\sqrt{15}}{2}$ (din triunghiul $POD, PO = 1, PD = OD = 2$).

Clasa a XI – a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=\sqrt{10}$, $a_2=\sqrt{20}$, $a_{[a_n]}=\dfrac{3a_n+2[a_n]+11}{5}$, $\forall n\geq 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

a) Calculaţi a_3 şi a_4.

b) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

Soluţie:

a) $a_3=a_{[a_1]}=\dfrac{3a_1+2[a_1]+11}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}+17}{5}$ şi $a_4=a_{[a_2]}=\dfrac{3a_2+2[a_2]+11}{5}=\dfrac{3\sqrt{20}+19}{5}$.

b) Arătăm prin inducţie după $n\geq 1$ că $n+2<a_n<n+3$ (care demonstrează şi definirea corectă a şirului: dacă $[a_n]=[a_k]$ atunci $a_n=a_k$).

Pentru $n=1, n=2$, adevărat din ipoteză.

Presupunem că $\forall k=\overline{1,n}, (n\geq 2), k+2<a_k<k+3$. Atunci

$$n+3<\frac{3(n+1)+2(n+1)+11}{5}<a_{n+1}=a_{[a_{n-1}]}=$$

$$=\frac{3a_{n-1}+2[a_{n-1}]+11}{5}<\frac{3(n+2)+2(n+1)+11}{5}<n+4$$

Cum $n+2<a_n<n+3, \forall n\geq 1$, din criteriul cleştelui, $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

c) $\dfrac{n+2}{n}<\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{n+3}{n}, \forall n\geq 1$ şi din criteriul cleştelui $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$.

2. Fie $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţii periodice de perioade T_1, respectiv T_2 astfel încât:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{x}=l_1\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x}=l_2\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se arate că $\left(3+\sqrt{7}\right)^n+\left(3-\sqrt{7}\right)^n=k_n\in\mathbb{Z}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^n T_1\right)}{f_2\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^n T_2\right)}$.

Prof. Dumitru Popa, Vălenii de Munte

Soluţie:

a) $\left(3+\sqrt{7}\right)^n+\left(3-\sqrt{7}\right)^n=3^n+C_n^1 3^{n-1}\sqrt{7}+\ldots+\left(\sqrt{7}\right)^n+3^n-C_n^1 3^{n-1}\sqrt{7}+\ldots+\left(-\sqrt{7}\right)^n=k_n\in\mathbb{Z}$.

b) Analog cu a): $\left(2+\sqrt{2}\right)^n+\left(2-\sqrt{2}\right)^n=p_n\in\mathbb{Z}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^n T_1\right)}{f_2\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^n T_2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f_1\left(k_nT_1-\left(3-\sqrt{7}\right)^n T_1\right)}{f_2\left(p_nT_2-\left(2-\sqrt{2}\right)^n T_2\right)}\overset{T_1,T_2\ perioade}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{f_1\left(-\left(3-\sqrt{7}\right)^n T_1\right)}{f_2\left(-\left(2-\sqrt{2}\right)^n T_2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f_1\left(-\left(3-\sqrt{7}\right)^n T_1\right)}{-\left(3-\sqrt{7}\right)^n T_1}\frac{-\left(2-\sqrt{2}\right)^n T_2}{f_2\left(-\left(2-\sqrt{2}\right)^n T_2\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{-\left(3-\sqrt{7}\right)^n T_1}{-\left(2-\sqrt{2}\right)^n T_2}=\frac{l_1}{l_2}\cdot 0=0,$$

$(3-\sqrt{7}<2-\sqrt{2})$.

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ inversabile. Arătaţi că:

a) Dacă $AB^{-1}=I_n+BA^{-1}$, atunci $\det(A-B)\neq 0$.

b) Dacă $BA^{-1}=I_n+AB^{-1}$, atunci $\det(A+B)\neq 0$.

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti

Soluţie:

a) $AB^{-1}=I_n+BA^{-1}\,|\cdot B\Rightarrow A=B+BA^{-1}B\Rightarrow\det(A-B)=\det B\cdot\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det B\neq 0$.

b) $BA^{-1}=I_n+AB^{-1}\,|\cdot B\Rightarrow BA^{-1}B=B+A\Rightarrow\det(A+B)=\det B\cdot\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det B\neq 0$.

4. Fie matricele $X=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}a&0\\a&1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că $(XY-YX)^2=I_2$.

b) Fie $A, B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB-BA)^n=I_2$, $n\in\mathbb{N}$. Demonstraţi că n este par.

c) Fie $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB-BA)^2=I_n$. Demonstraţi că n este par.

Prof. Dorin Vasile, Ploieşti

Soluţie: **.** a) $XY-YX=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-a&a\\-a-1&a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&1-a\\1+a&-a\end{pmatrix}\Rightarrow(XY-YX)^2=I_2$.

b) Notăm $C=AB-BA$ şi $\det C=d$. Din teorema Cayley-Hamilton:
$C^2-(trC)\cdot C+(\det C)\cdot I_2=0_2$ şi cum $tr(C)=0\Rightarrow C^2=d\cdot I_2$. Pentru $k\in\mathbb{N}^*$,
$C^{2k}=d^k\cdot I_2$ şi $C^{2k+1}=d^k\cdot C$. Cum $C^n=I_2\Rightarrow d^n=1\Rightarrow d\neq 0$,
$trI_2=2\neq 0=tr\left(d^k\cdot C\right)=d^k\cdot trC$. Prin urmare n este par.

c) Notăm $C=AB-BA$. Fie λ rădăcină a polinomului caracteristic (valoare proprie a lui C)
$P_C(X)=\det(X\cdot I_n-C)\Rightarrow\exists\, v\neq 0, (X\cdot I_n-C)v=0\Leftrightarrow Cv=\lambda v$ (un sistem omogen cu determinant 0 are soluţii nenule),
$C^2=I_2\Rightarrow C^2v=v\Rightarrow C\lambda v=v\Rightarrow\lambda Cv=v\Rightarrow\left(\lambda^2-1\right)v=0$ şi cum $v\neq 0\Rightarrow\lambda\in\{-1,1\}$.

Suma rădăcinilor lui P_C (suma valorilor proprii) este $trC=0$ (se poate proba prin calculul direct al $P_C(X)=\det(X\cdot I_n-C)$) rezultă că, dintre rădăcinile polinomului caracteristic, numărul celor egale cu 1 este egal cu numărul celor egale cu -1, adică n este par.

Clasa a XII – a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu *n* elemente, $n\geq 3$, cu proprietatea: $\forall x\in G, \exists y\in G$ astfel încât $x=y^2$.

a) Demonstrați că *n* este impar.

b) Demonstrați că grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$, cu *n* impar, are proprietatea de mai sus.

Prof. Dorin Vasile, Ploiești

Soluție: a) Din ipoteză, funcția $f:G\to G,\ f(x)=x^2$ este surjectivă și cum $(G,\cdot)$ este un grup finit rezultă că este *f* este injectivă, deci $\forall x\in G\setminus\{e\},\ f(x)\neq f(e)\Rightarrow \forall x\in G\setminus\{e\},\ x^2\neq e$. Prin urmare $G=\{e\}\cup\bigcup_{x^2\neq e}\{x,x^{-1}\}$ și *G* are un număr impar de elemente.

b) Fie $x\in\{0,1,...,n-1\}$. Dacă *x* este par, luăm $y=\dfrac{x}{2}\Rightarrow \hat{x}=\hat{y}+\hat{y}$, dacă *x* este impar, luăm $y=\dfrac{x-n}{2}\Rightarrow \hat{x}=\hat{y}+\hat{y}$.

2. Spunem că o funcție *f* are proprietatea „*P*” dacă *f* este continuă pe $[a,b]$ și $\forall c\in(a,b), \exists u,v\in[a,b], u\neq v$ astfel ca $\int_u^v f(x)dx=(v-u)f(c)$, unde $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ fixati.

a) Pentru $a=0, b=2$ arătați că $f(x)=xe^{-x}$ nu are proprietatea “*P*”.

b) Să se demonstreze că orice funcție continuă pe $[a,b]$ care admite o primitivă convexă pe $[a,b]$ are proprietatea “*P*”.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

Soluție: *f* este continuă pe $[a,b]$, deci are primitivă $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. Pentru $c\in(a,b)$ notăm $G_c(x)=F(x)-x\cdot f(c)$, $G_c:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Cum $\int_u^v f(x)dx=(v-u)f(c)\Leftrightarrow F(v)-F(u)=vf(c)-uf(c)\Leftrightarrow G_c(v)=G_c(u)$, *f* are proprietatea “*P*” dacă $\forall c\in(a,b), G_c$ nu este injectivă.

a) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, iar pentru $c=1$, $f(x)<f(c), \forall x\in[0,2]\setminus\{1\}$ și $G_c'(x)<0, \forall x\in[0,2]\setminus\{1\}$, deci $\exists c\in(a,b), G_c$ este injectivă (fiind strict descrescătoare). În concluzie $f(x)=xe^{-x}$ nu are proprietatea “*P*” pe $[0,2]$.

b) Lemă: Dacă *F* este convexă și derivabilă pe $[a,b]$, atunci $f=F'$ este crescătoare.

Dem. lemă: Fie $x<y,\ x,y\in[a,b]$. *F* este convexă, deci $\forall\alpha\in(0,1)$,

$$F\big((1-\alpha)x+\alpha y\big)\leq(1-\alpha)F(x)+\alpha F(y),\ z=(1-\alpha)x+\alpha y\Rightarrow\frac{F(z)-F(x)}{z-x}\leq\frac{F(y)-F(z)}{y-z}$$

și trecând la limită $z\to x$, apoi $z\to y$, obținem

$f(x)=F'(x)\le \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}\le F'(y)=f(y)$.

Fie f o funcție continuă pe $[a,b]$ care admite o primitivă F convexă pe $[a,b]$. Din lemă $f=F'$ este crescătoare, deci $\forall c\in(a,b)$, $f(x)\le f(c), \forall x\in[a,c]$ şi $f(x)\ge f(c), \forall x\in[c,b]$, adică G_c este descrescătoare pe $[a,c]$ şi crescătoare pe $[c,b]$, deci nu este injectivă, iar f are proprietatea "P".

3. Fie funcțiile $f, F:[0,\infty)\to[1,\infty)$, $F(0)=1, [F(x)]=[f(x)], \forall x\ge 0$ şi F este o primitivă a funcției f, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

a) Să se arate că există o funcție f cu aceste proprietăți.

b) Demonstrați că F este bijectivă.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F^{-1}(x)}{\ln x}$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Soluție: a) $f(x)=e^x \Rightarrow f(x)=F(x)$ verifică proprietățile din enunț.

b) $(F(x)-x)'=f(x)-1\ge 0$, deci $F(x)-x$ este crescătoare pe $[0,\infty)\Rightarrow F(x)-x\ge F(0)=1 \Rightarrow F(x)\ge x+1, \forall x\in[0,\infty)$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$. Cum $F(0)=1$ şi F continuă, rezultă F surjectivă. Din $F'(x)=f(x)>0, \forall x\in[0,\infty)$, rezultă F injectivă, deci F este bijectivă.

c) F este strict crescătoare cu $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$, deci $\lim\limits_{y\to\infty}F^{-1}(y)=\infty$ şi

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F^{-1}(x)}{\ln x}\overset{y=F^{-1}(x)}{=}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\ln F(y)}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(y)}{f(y)}=1$, deoarece $[F(y)]=[f(y)], \forall y\ge 0\Rightarrow$

$\dfrac{F(y)}{F(y)+1}\le\dfrac{F(y)}{[F(y)]+1}=\dfrac{F(y)}{[f(y)]+1}<\dfrac{F(y)}{f(y)}\le\dfrac{F(y)}{[f(y)]}=\dfrac{F(y)}{[F(y)]}<\dfrac{F(y)}{F(y)-1}$ şi cum $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$ se aplică criteriul cleştelui.

4. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze: $\displaystyle\int\frac{x^{3n-1}+x^{n-1}}{x^{4n}-x^{2n}+1}dx, x\in\mathbb{R}$.

Prof. Ion Nedelcu, Ploieşti

Soluție:

Notăm $x^n=t\Rightarrow nx^{n-1}dx=dt$ şi integrala devine

$$I_t=\frac{1}{n}\int\frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}dt=\frac{1}{n}\int\frac{t^2+1}{\left(t^2-t\sqrt{3}+1\right)\left(t^2+t\sqrt{3}+1\right)}dt\overset{fr.simple}{=}$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\int\frac{1}{t^2-t\sqrt{3}+1}dt+\int\frac{1}{t^2+t\sqrt{3}+1}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(arctg\left(2t-\sqrt{3}\right)+arctg\left(2t+\sqrt{3}\right)\right)+C$$

Deci $\displaystyle\int\frac{x^{3n-1}+x^{n-1}}{x^{4n}-x^{2n}+1}dx=\frac{1}{n}\left(arctg\left(2x^n-\sqrt{3}\right)+arctg\left(2x^n+\sqrt{3}\right)\right)+C$.